GEOMETRISCHE

WAHRSCHEINLICHKEITEN

UND

MITTELWERTE.

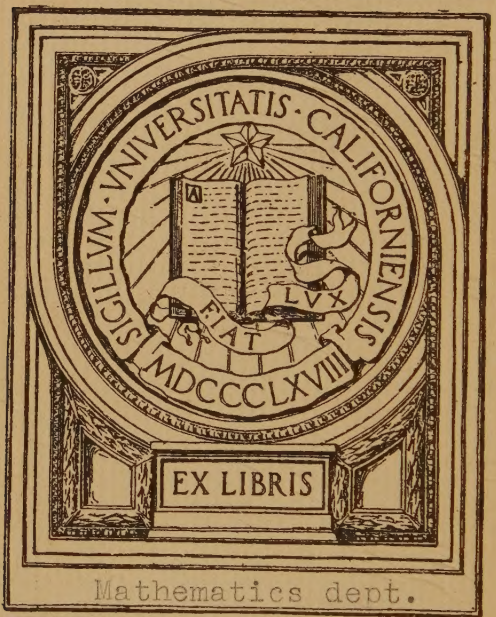
VON

EMANUEL CZUBER.

MIT 115 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1884

GIFT OF
JULIUS WANGENHEIM '87



Mathematics dept.

GEOMETRISCHE WAHRSCHEINLICHKEITEN

UND

MITTELWERTE.

VON

EMANUEL CZUBER.

MIT 115 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1884.

QA215
C9
Math.
Dept.

Gift of J. Wangenheim
to Math. Dept.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Vorrede.

Das vorliegende Buch ist der erste Versuch einer zusammenfassenden Darstellung des jüngsten Zweiges der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten.

Die erste Anregung, geometrische Beziehungen in den Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu ziehen, wurde allerdings schon um die Mitte des vorigen Jahrhunderts durch einige Aufgaben gegeben, welche Buffon in seinem Essai d'Arithmétique Morale aufgestellt und gelöst hat; eine dieser Aufgaben, das später so benannte Nadelproblem, zusammen mit einer ähnlichen schwierigeren hat auch Laplace in sein monumentales Werk aufgenommen. Doch blieb es lange bei diesen vereinzelten Problemen und erst in den letzten Decennien wurde der Gegenstand von neuem aufgenommen. Vornehmlich waren es mehrere namhafte englische und einige französische Mathematiker, welche sich desselben mit einer gewissen Vorliebe bemächtigten und zahlreiche Arbeiten darüber in verschiedenen Fachschriften niederlegten. Genannt seien Colonel A. R. Clarke, H. Mc'Coll, E. B. Seitz, J. J. Sylvester, S. Watson, Rev. J. Wolstenholme, W. S. B. Woolhouse, deren Arbeiten in den Educational Times erschienen sind, dann E. Barbier,

C. Jordan, E. Lemoine, L. Lalanne, die in Liouvilles Journal, in den Comptes rendus u. a. O. einschlägige Arbeiten veröffentlicht haben. Allen voran aber muss M. W. Crofton, Professor an der Kriegsakademie in Woolwich, genannt werden, der abgesehen von mehreren kleineren Aufsätzen in einer grundlegenden Abhandlung (in den Philosophical Transactions 1868) diejenigen Probleme der geometrischen Wahrscheinlichkeit behandelte, welche auf willkürlich gezogene Gerade und willkürlich gelegte Ebenen sich beziehen. Croftons Methoden zeichnen sich durch Eleganz und einen hohen Grad von Allgemeinheit aus; ihm gebührt auch das Verdienst, diese Methoden als ein neues Hilfsmittel in die Analysis, speciell die Integralrechnung eingeführt zu haben, wodurch der neue Gegenstand gewiss ein allgemeineres Interesse gewonnen hat.

Was die geometrischen Mittelwerte anlangt, welche den zweiten minder umfangreichen Teil des Buches bilden, so ist ihre Aufnahme durch die engen Beziehungen, welche sie zu den geometrischen Wahrscheinlichkeiten haben, vollauf begründet. Grundlagen und Methoden sind beiden gemeinschaftlich; überdies lassen sich Probleme des einen Gebiets häufig mit Vorteil auf das andere übertragen.

Im ersten Teile wurden die elementaren Raumgebilde: Punkt, Gerade und Ebene zur Grundlage der Einteilung gewählt. Innerhalb dieser Haupt- und ihrer Nebenabschnitte sind die Probleme sowohl nach dem Grade der Schwierigkeit als nach den Methoden ihrer Lösung geordnet worden. Im zweiten Teile wurde von einer äusserlichen Einteilung der Materie Umgang genommen; doch sind auch hier die

Mittelwerte von Linien denjenigen von Flächen vorangestellt und im übrigen die Methoden als Motiv der Anordnung angenommen.

Bevor ich schliesse, halte ich mich für verpflichtet, den Herren Dr. C. Ohrtmann und Dr. Felix Müller in Berlin für die Freundlichkeit, mit welcher sie mir einige litterarische Behelfe zur Verfügung stellten, und der geehrten Verlagshandlung für die schöne Ausstattung zu danken.

Prag, im Mai 1884.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Geometrische Wahrscheinlichkeiten.

Seite

Einleitung 1

Erstes Kapitel.

Willkürlich angenommene Punkte 8

1. Punkte in Linien 10
2. Punkte in Flächen 52
3. Punkte im Raume 69

Zweites Kapitel.

Willkürlich gezogene Gerade 77

1. Gerade in der Ebene 77
2. Gerade im Raume 166

Drittes Kapitel.

Willkürlich gelegte Ebenen 174

Zweiter Teil.

Geometrische Mittelwerte.

Einleitung 184

Sätze und Aufgaben 189

Erster Teil.

Geometrische Wahrscheinlichkeiten.

Einleitung.

1. Die gewöhnlichen Aufgaben über apriorische Wahrscheinlichkeit beziehen sich auf diskrete Gesamtheiten günstiger und möglicher Fälle; der Quotient aus den Anzahlen dieser Fälle giebt die verlangte Wahrscheinlichkeit.

Es ist hier immer zulässig, die Gesamtheit der Fälle etwa durch einen Haufen von Kugeln zu versinnlichen, die durch irgend welche Merkmale von einander unterschieden sind, am einfachsten durch aufgeschriebene Ordnungszahlen; jede einzelne Kugel ist dann durch ihre Ordnungszahl bestimmt und von den übrigen unterschieden, und indem man die Ordnungszahlen als Vertreter der Kugeln hinsetzt, hat man die Gesamtheit der Fälle durch eine diskrete Gesamtheit von Zahlen oder Zahlenverbindungen dargestellt, je nachdem das Ereignis, um dessen Wahrscheinlichkeit gefragt wird, auf das Ziehen einer oder mehrerer Kugeln zurückgeführt werden kann.

Dieser Gattung von Aufgaben stehen andere gegenüber, welche auf kontinuierliche oder konkrete Gesamtheiten möglicher und günstiger Fälle sich beziehen. Es sind dies solche Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung, bei welchen die möglichen und günstigen Fälle analytisch durch Werte oder Wertverbindungen stetig veränderlicher Grössen sich darstellen lassen, in ihrer Gesamtheit also stetige Mannigfaltigkeiten ein- oder mehrfacher Ausdehnung bilden und daher in unbeschränkter Anzahl vorhanden sind.

Wenn, um mit dem einfachsten Falle zu beginnen, gefragt wird, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Punkt, der in einer gegebenen Geraden willkürlich angenommen wurde, gewisse Bedingungen erfüllt, so repräsentieren alle Punkte der Geraden die Gesamtheit der möglichen, und jene Punkte, welche den gestellten Bedingungen genügen, die Gesamtheit der günstigen Fälle. Wird nun ein Punkt der Geraden dadurch charakterisiert, dass man seine Entfernung x von einem Endpunkte, auf irgend welche Einheit bezogen, angiebt, so werden alle Punkte der Geraden durch alle Werte der Variabeln x zwischen 0 und a (wenn a die mit derselben Einheit gemessene Länge der Geraden ist), d. h. durch eine einfach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit dargestellt, und diejenigen Punkte, welche den aufgestellten Bedingungen entsprechen, durch eine zweite ebensolche Mannigfaltigkeit, deren Begrenzung aus diesen Bedingungen hervorgeht.

Lautet die Frage nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein in einer ebenen begrenzten Fläche beliebig angenommener Punkt gewisse Bedingungen erfüllt, so denke man sich die Figur auf ein in ihrer Ebene angeordnetes rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen und bezeichne die Koordinaten eines ihrer Punkte mit x, y; dann werden alle Punkte der Figur durch jene zweifach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit der Variabeln x, y dargestellt, deren Begrenzung aus dem Umfange der Figur hervorgeht, die dem in Rede stehenden Ereignis günstigen Fälle durch eine ebenso geartete Mannigfaltigkeit, deren Begrenzung aus den Bedingungen, welche der Punkt zu erfüllen hat, abgeleitet werden muss.

Soll überhaupt die Wahrscheinlichkeit dafür angegeben werden, dass ein geometrisches Gebilde, welches von n unabhängigen Variabeln bedingt ist, gewissen Forderungen Genüge leistet, so entspricht der Gesamtheit aller möglichen Fälle eine n-fach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit der n Variabeln von gegebener Begrenzung, den günstigen Fällen eine gleichgeartete Mannigfaltigkeit, deren Begrenzung aus den gestellten Forderungen erst abzuleiten ist.

2. Man hat derlei Wahrscheinlichkeiten, welche geometrische Beziehungen betreffen, geometrische Wahrscheinlichkeiten* genannt. Vom analytischen Standpunkte aber sind alle jene Wahrscheinlichkeiten hierher zu zählen, welche von stetig veränderlichen Grössen abhängen, daher insbesondere auch solche, die für Beziehungen unter stetig veränderlichen Zahlen selbst gelten.

3. Der analytischen Lösung derartiger Aufgaben liegt ein allgemeiner Satz zu Grunde, der hier für den Fall zweier unabhängiger Variabeln entwickelt werden soll.

Bezeichnet K das gegebene Gebiet der möglichen Wertverbindungen, K' das aus den Bedingungen der Aufgabe abgeleitete Gebiet der dem Ereignis günstigen Wertcombinationen der Variabeln x, y, so ist die verlangte Wahrscheinlichkeit ein Bruch, dessen Zähler die Menge der Wertverbindungen im Gebiete K' und dessen Nenner die Menge der Wertcombinationen im Gebiete K angiebt.

Wie die Aufgabe aber beschaffen sein mag, im vorliegenden Falle kann sie immer in ein geometrisches Gewand gekleidet werden; betrachtet man nämlich x, y als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes in einer Ebene, so entsprechen den Gebieten K, K' (je ein oder mehrere) begrenzte Teile dieser Ebene, den günstigen Fällen Punkte in der Fläche K', den möglichen Fällen Punkte in K; die fragliche Wahrscheinlichkeit erscheint jetzt als Quotient aus der Anzahl der Punkte, welche in den Teil K' der Ebene fallen, und der Anzahl jener Punkte, welche in K sich befinden.

Erteilt man den Variabeln x, y diskrete Reihen von Werten, bezeichnet zwei aufeinander folgende Werte der ersten Reihe mit x_α, $x_{\alpha+1}$, der zweiten Reihe mit y_β, $y_{\beta+1}$, setzt ihre positiven Differenzen

$$x_{\alpha+1} - x_\alpha = \Delta x_\alpha, \quad y_{\beta+1} - y_\beta = \Delta y_\beta,$$

so wird der Grenzwert, welchem die über das Gebiet K ausgedehnte Summe

---

* Local Probability, Geometrical Probability sind die von englischen Mathematikern gebrauchten Bezeichnungen (s. Crofton, Philos. Transactions, Vol. 158, pag 181).

$$\sum_{\alpha}\sum_{\beta} \Delta x_\alpha \Delta y_\beta$$

für beständig abnehmende Werte von Δx_α, Δy_β sich nähert, durch das über das nämliche Gebiet ausgedehnte doppelte Integral

$$\iint dx\,dy$$

dargestellt.

Geometrisch entspricht diesem Vorgange eine Zerlegung des Gebietes K in Rechtecke, und zwar durch Parallele zu den Axen; $\Delta x_\alpha \Delta y_\beta$ bedeutet den Flächeninhalt eines der Rechtecke, $\sum_{\alpha}\sum_{\beta} \Delta x_\alpha \Delta y_\beta$ die Summe aller.

Werden aber die Werte von x, y sämtlich so gewählt, dass sie Vielfache eines mit einer gewissen ganzen Zahl M gebildeten Bruches $\frac{1}{M}$, die Differenzen benachbarter Werte daher durchwegs gleich $\frac{1}{M}$ sind, dann erscheint das Gebiet K der Ebene in Quadrate vom Inhalte $\frac{1}{M^2}$ zerlegt, und ist Z ihre Anzahl, so ist

$$\sum_{\alpha}\sum_{\beta} \Delta x_\alpha \Delta y_\beta = \frac{Z}{M^2};$$

das Abnehmen der Differenzen Δx, Δy wird jetzt durch beständiges Wachsen der Zahl M herbeigeführt; mithin ist

$$1) \qquad \iint dx\,dy = lim\,\frac{Z}{M^2}$$

für ein beständig wachsendes M. Nun aber fällt Z offenbar zusammen mit der Anzahl der Punkte, welche bei der beschriebenen Zerlegung des Gebietes K durch die gegenseitigen Schnitte der Teilungslinien darin erzeugt werden, während das linksstehende Integral den Flächeninhalt von K ausdrückt. Gleichung 1) besagt also:

Der Grenzwert des Bruches $\frac{Z}{M^2}$, *dessen Zähler die Anzahl der in das Gebiet* K *fallenden Punkte angiebt, kommt für eine ohne Ende wachsende Zahl* M *dem Flächeninhalte des Gebietes* K *gleich.*

Dehnt man die gleiche Betrachtung auf das Gebiet K' der günstigen Fälle aus und bezeichnet die Anzahl der dahin fallenden Punkte mit Z', so ist auch hier

$$2) \qquad \iint dx\,dy = lim\,\frac{Z'}{M^2},$$

die Integration über K' ausgedehnt.

Die verlangte Wahrscheinlichkeit ist demnach gleich

$$3) \qquad p = lim\,\frac{Z'}{Z} = \frac{lim\,\frac{Z'}{M^2}}{lim\,\frac{Z}{M^2}} = \frac{\text{Inhalt des Gebietes } K'}{\text{Inhalt des Gebietes } K}.$$

Der Vorteil der geometrischen Anschauung ist auch bei einer und bei drei unabhängigen Variabeln vorhanden, und man wird hier zu analogen Sätzen geführt, welche in den folgenden einen zusammengefasst werden können:

Das Verhältnis der Punktmengen, welche in zwei Linien, zwei Flächen, zwei Räumen enthalten sind, wird durch das Verhältnis der Längen dieser Linien, beziehungsweise der Inhalte der Flächen und Räume ausgedrückt.

Bei mehr als drei Variabeln hört zwar die geometrische Deutung auf, die Betrachtung bleibt aber im Wesen dieselbe und liefert das folgende Resultat.

Hängt eine Wahrscheinlichkeit von den n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ ab, ist K das gegebene Gebiet der möglichen, K' das aus den Bedingungen der Aufgabe abgeleitete Gebiet der günstigen Wertverbindungen; so denke man den Variabeln solche Werte erteilt, welche arithmetische Reihen mit der gemeinschaftlichen Differenz $\frac{1}{M}$ bilden. Sind Z, Z' die Anzahlen der Wertverbindungen, welche solchermassen in K, K' sich ergeben, so ist für ein beständig wachsendes M

$$4) \qquad lim\,\frac{Z}{M^n} = \int\int \ldots \int dx_1\,dx_2 \ldots dx_n,$$

die Integration über das Gebiet K ausgedehnt,*

* Vergl. R. Lipschitz' Lehrbuch der Analysis, Bd. II, pag. 544 und 562, und die Abhandlungen Lejeune Dirichlet's in Crelle's Journal, Bd. 19, pag. 392 und Bd. 24, pag. 356 flg.

5) $$\lim \frac{Z'}{M^n} = \int\int \ldots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

die Integration über das Gebiet K' ausgedehnt, die verlangte Wahrscheinlichkeit daher

$$p = \lim \frac{Z'}{Z} = \frac{\lim \frac{Z'}{M^n}}{\lim \frac{Z}{M^n}} = \frac{\int\int \ldots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n \,(\text{Gebiet } K')}{\int\int \ldots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n \,(\text{Gebiet } K)}.$$

In Analogie mit den Fällen von 1, 2, 3 Variabeln kann man das über die Mannigfaltigkeit K ausgedehnte $n$fache Integral

$$\int\int \ldots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

den Inhalt des Gebietes K nennen; p schreibt sich dann in der Form:

6) $$p = \frac{\text{Inhalt des Gebietes } K'}{\text{Inhalt des Gebietes } K}.$$

Demnach kann der Inhalt eines Gebietes von n *Variabeln als ein Mass für die Anzahl der Wertverbindungen angesehen werden, welche dieses Gebiet ausmachen.*

Die Ermittelung einer Wahrscheinlichkeit, welche von einer oder mehreren stetig veränderlichen Grössen abhängig ist, führt also auf die Berechnung des Inhaltes von zwei stetigen Mannigfaltigkeiten gleicher Anzahl von Ausdehnungen, d. i. auf die Auswertung zweier mehrfacher bestimmter Integrale.

4. Ausser der eben entwickelten allgemeinen Methode giebt es noch viele andere, welche die Auswertung von Integralen gänzlich ersparen oder doch wesentlich vereinfachen. Andererseits führt die Anwendung dieser Methoden zu Sätzen über bestimmte Integrale, die in anderer Weise in solcher Allgemeinheit nicht leicht zu begründen wären. Dadurch tritt dieser Zweig der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit der Integralrechnung in eine bemerkenswerte und wichtige Beziehung.

Die besonderen Methoden sind so mannigfach, dass es kaum angeht sie anders als aus der Anwendung auf besondere Probleme kennen zu lernen. Eine der wichtigsten besteht

in der Anwendung geometrischer Mittelwerte, welche mit den geometrischen Wahrscheinlichkeiten dadurch zusammenhängen, dass ihnen wie diesen stetige Gesamtheiten geometrischer Gebilde (oder stetige Gesamtheiten von Werten) zu Grunde liegen. Auch hier besteht eine Wechselbeziehung, indem umgekehrt die Bestimmung von Mittelwerten häufig auf die Ermittelung von Wahrscheinlichkeiten mit Vorteil zurückgeführt werden kann.

5. Es ist wiederholt vorgekommen, dass Probleme über geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte abweichende Lösungen gefunden haben. Der Grund hierfür lag immer in der verschiedenen Auffassung des Begriffes „willkürlich", dessen Bedeutung thatsächlich nicht immer so klar zu Tage liegt, um Meinungsverschiedenheiten auszuschliessen.

In einer gegebenen Geraden einen Punkt „willkürlich" annehmen, das lässt wohl nur die eine Deutung zu: die Entfernung des Punktes von einem festen Punkte der Geraden kann jeden Wert, den die Grenzen der Geraden zulassen, und jeden mit demselben Grade der Möglichkeit annehmen.

Aber schon die Forderung, in einer gegebenen krummen Linie einen Punkt „willkürlich" anzunehmen, kann verschieden gedeutet und erfüllt werden; entweder kann darunter ein Punkt verstanden werden, dessen von einem festen Punkte der Kurve längs dieser gemessene Entfernung jeden vermöge der Ausdehnung der Kurve zulässigen Wert haben kann, oder ein Punkt, dessen Abscisse — wenn die Kurve durch ihre Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten dargestellt ist — jeden Wert, der zulässig ist, und jeden mit demselben Grade der Möglichkeit annehmen kann.

Während im ersten Falle der Kurvenbogen die Variable ist, welche je eine stetige Mannigfaltigkeit der günstigen und möglichen Fälle bildet, ist es im andern Falle die Abscisse, und man muss zu verschiedenen Resultaten geführt werden, je nachdem man für das eine oder andere sich entscheidet.

Aus dieser Betrachtung geht hervor, dass die Deutung des Wortes „willkürlich" mit der Wahl der unabhängigen

Variabeln zusammenfällt. Wo der Sinn aus dem Wortlaute des Problems nicht eindeutig hervorgeht, kann immerhin darüber diskutiert werden, welche Auffassung der Natur der Sache am meisten entspricht.

Erstes Kapitel.

Willkürlich angenommene Punkte.

6. **Theorem I.** *Die Anzahl der Punkte in einer Linie, einer Fläche, einem Raume von gegebener Ausdehnung wird durch die Länge der Linie, beziehungsweise den Inhalt der Fläche, des Raumes gemessen.*

Die Begründung liegt in den Sätzen von Nr. 3 der Einleitung, könnte aber unabhängig davon auch so geführt werden. Denkt man sich in der Linie, der Fläche, dem Raume Punkte beliebig angenommen, so würde mit wachsender Anzahl ihre Anordnung der gleichförmigen Verteilung über die Linie u. s. f. immer mehr zustreben und sie bei unendlicher Anzahl der Punkte erreichen. Man hat sich demnach die Gesamtheit von Punkten, welcher ein willkürlich angenommener Punkt angehört, so vorzustellen, dass gleiche, beliebig kleine Teile der Linie u. s. f. gleich viel Punkte enthalten, oder dass die Mengen der Punkte in ungleichen Teilen sich wie die Grössen dieser Teile verhalten.

Die Vorstellung der gleichförmigen Dichte der Punkte fällt mit der Vorstellung einer regelmässigen Anordnung derselben nicht notwendig überein, wird aber durch letztere vereinfacht und erleichtert. Die Betrachtung, auf welche die Begründung der allgemeinen Sätze in Nr. 3 sich stützt, geht thatsächlich von einer regelmässigen Anordnung der Punkte (allgemein der Wertverbindungen der Variabeln) aus; die Punkte in einer Geraden sind äquidistant und haben den gegenseitigen Abstand $\frac{1}{M}$; die Punkte in einer ebenen Fläche

bilden die Ecken eines Netzes gleich grosser Quadrate vom Inhalte $\frac{1}{M^2}$; die Punkte im Raume erscheinen als Ecken gleich grosser Würfel des Inhaltes $\frac{1}{M^3}$. Und diese regelmässige Anordnung bleibt während des Grenzüberganges, d. i. bei unendlich wachsendem M, aufrecht.

Von einem beliebigen Punkte einer krummen Linie wird häufig in anderem Sinne gesprochen, als es dem Theorem I entsprechen würde. Diesem zufolge wäre ein Punkt der Kurve durch den von einem festen Punkte gezählten Bogenabstand s zu charakterisieren; erteilt man dem s Werte, welche Vielfache des Bruches $\frac{1}{M}$ sind, so wird dadurch auf der Kurve eine gleichförmige Punktreihe bezeichnet, welche gleichförmig bleibt, wenn M über alle Grenzen zunimmt.

Ist aber die Kurve, auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, durch die Gleichung

$$y = F(x)$$

dargestellt, und fasst man als „beliebig" einen Punkt auf, der einem beliebigen Werte von x entspricht, so wird durch eine Wertreihe von x, deren einzelne Werte die aufeinander folgenden Vielfachen des Bruches $\frac{1}{M}$ sind, auf der Kurve eine ungleichförmige Punktreihe angegeben, die auch dann ungleichförmig bleibt, wenn M ins Unendliche wächst.

Wieder andere Punktreihen würden der Darstellung der Kurve durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u)$$

oder durch die Polargleichung

$$r = \chi(\theta)$$

entsprechen, wenn jedesmal der einem beliebigen Werte von u, beziehungsweise θ entsprechende Punkt der Kurve als willkürlich angenommen aufgefasst wird.

Dass man zu verschiedenen Resultaten gelangen muss, wenn man ein und dasselbe Problem mit Zugrundelegung dieser verschiedenen Gesamtheiten von Punkten löst, ist selbstverständlich.

Sind in einer Linie, einer Fläche oder einem Raume zwei, drei, ... Punkte willkürlich anzunehmen, so denke man sich zuerst einen, unabhängig von diesem einen zweiten, dann einen dritten Punkt ... angenommen. Die Anzahl der Punktcomplexe wird dann durch die zweite, dritte, ... Potenz jener Zahl gemessen, welche die Grösse der Linie u. s. f. angiebt. Dabei ist wohl zu beachten, dass eine herausgegriffene Gruppe in der Gesamtheit so oft gezählt wird, als die Punkte, wenn man sie wie verschiedene Elemente ansieht, Permutationen ergeben würden, also 2!, 3!, ... mal; denn jeder Punkt der Gruppe kann als erst-, zweit-, drittgewählter ... betrachtet werden.

Bezieht sich ein Problem auf zwei in einer gegebenen Geraden willkürlich angenommene Punkte, so bilden die Wertverbindungen der Abstände dieser Punkte von einem Endpunkte der Geraden eine Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung; eine solche entspricht aber auch den Punkten einer ebenen Fläche, so dass die ursprüngliche Aufgabe auf eine solche zurückgeführt werden kann, welche einen Punkt in einer ebenen Figur betrifft.

Gleicher Weise kann ein Problem über drei in einer Geraden willkürlich anzunehmende Punkte zurückgeführt werden auf ein anderes, das auf einen Punkt im Raume sich bezieht.

Der Fall einer zwischen gegebenen Grenzen willkürlich zu wählenden Zahl ist identisch mit der willkürlichen Annahme eines Punktes in einer Geraden, deren Länge dem Intervall der Grenzen entspricht, an welche die Zahl gebunden ist.

1. Punkte in Linien.

7. **Problem I.** *In der Geraden* $AB = a$ *wird ein Punkt willkürlich angenommen; welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass seine Entfernung von* A *zwischen den Grenzen* x *und* $x + dx$ *enthalten ist, oder wie man kurz sagt, dass sie gleich* x *ist?*

Lösung. Die verlangte Wahrscheinlichkeit ist $\frac{dx}{a}$.

8. **Problem II.** *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der in* AB = a *willkürlich angenommene Punkt näher an* A *liegt als an* B?

Lösung. Die geforderte Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{2}$, weil es ebensoviel günstige Fälle giebt, als ungünstige.

9. **Problem III.** *Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden zwei beliebig in* AB = a *angenommene Punkte innerhalb der Entfernung* b *von* A *liegen?*

Lösung. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt innerhalb der Entfernung b von A sich befindet, ist $\frac{b}{a}$; dass zwei unabhängig von einander angenommene Punkte diese Bedingung erfüllen, dafür ist die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{b^2}{a^2}$.

10. **Problem IV.** *Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass von zwei willkürlich in* AB = a *angenommenen Punkten der erste von* A *weiter entfernt ist als der zweite.*

Lösung. Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Punkt in die Entfernung x von A fällt, ist $\frac{dx}{a}$; die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite näher an A, also innerhalb der Entfernung x von A liegen wird, ist $\frac{x}{a}$; daher die zusammengesetzte und vollständige Wahrscheinlichkeit

$$p = \int_0^a \frac{x\,dx}{a^2} = \frac{1}{2};$$

eine einfache Betrachtung bestätigt dies Resultat.

11. **Problem V.** *In der Geraden* AB = a *werden zwei Punkte willkürlich angenommen; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihre gegenseitige Entfernung einen gegebenen Betrag* b *überschreitet?*

Erste Lösung. Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Punkt in der Entfernung x, der zweite in der Entfernung y von A liegen wird, ist $\frac{dx\,dy}{a^2}$; wird

1) $$y > x$$

vorausgesetzt, so tritt ein günstiger Fall ein, wenn

2) $$y - x > b,$$

3) $$y < a.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also das über die durch die Ungleichheiten 1) ... 3) begrenzte Mannigfaltigkeit ausgedehnte Integral des obigen Ausdruckes, welches jedoch zu verdoppeln ist, um auch die Fälle

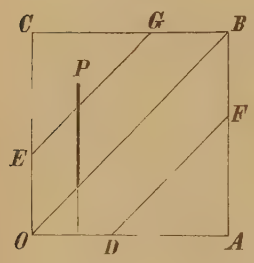
$$y < x$$

einzubeziehen, also

$$p = \frac{2}{a^2} \int_0^{a-b} \int_{x+b}^{a} dx\, dy = \left(\frac{a-b}{a}\right)^2.$$

Zweite Lösung. Man kann die Entfernungen x, y der beiden Punkte von A als Koordinaten eines Punktes P ansehen, welcher in dem Quadrate $OABC$ (Fig. 1) von der Seite a willkürlich angenommen wurde; der arithmetische Unterschied dieser Koordinaten giebt die jeweilige Entfernung der erstgenannten zwei Punkte an. Konstruiert man $OD = OE = b$, DF und EG parallel OB, so tritt ein günstiger Fall ein, so oft der Punkt P in eines der Dreiecke DAF, CEG fällt. Demnach ist die verlangte Wahrscheinlichkeit

Fig. 1.



$$p = \frac{DAF + CEG}{OABC} = \left(\frac{a-b}{a}\right)^2.$$

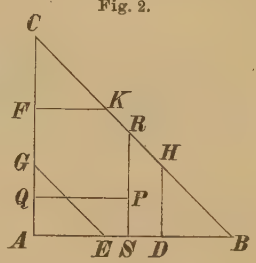
12. **Problem VI.** *Eine Gerade, deren Länge* a *ist, wird durch zwei beliebig gewählte Punkte in drei Teile geteilt; die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass kein Teil grösser ist als* b.

Lösung. Nimmt man in dem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke ABC (Fig. 2), wo $AB = AC = a$ ist, den Punkt P willkürlich an, führt durch ihn die Linien PQ, RS parallel, beziehungsweise rechtwinklig zu AB, so können

PQ, PR, PS als die erwähnten Abschnitte der Geraden a gelten. Im weiteren sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. $b > \frac{1}{2}a$ (Fig. 2). Man konstruiere $AD = BE = AF = CG = b$, DH rechtwinklig zu AB, FK rechtwinklig zu AC und verbinde E mit G. Ein günstiger Fall ergiebt sich, so oft der Punkt P in das Sechseck $EDHKFG$ fällt. Die verlangte Wahrscheinlichkeit ist also in diesem Falle

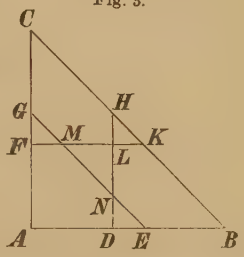
Fig. 2.



$$1)\quad p = \frac{ABC - 3.AEG}{ABC} = 1 - 3\left(\frac{a-b}{a}\right)^2.$$

2. $b < \frac{1}{2}a$ (Fig. 3). Dieselben Konstruktionen wie vorhin führen zu einem Dreieck LMN, welches die günstigen Lagen von P enthält. Folglich ist für diesen Fall

Fig. 3.



$$2)\quad p = \frac{LMN}{ABC} = \left(\frac{3b - a}{a}\right)^2.$$

13. **Problem VII.** *Ein dünner Stab von der Länge* a *wird in drei Stücke zerbrochen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass aus den Stücken ein Dreieck gebildet werden kann?*

Erste Lösung. Die Längen x, y, z der drei Stücke unterliegen den Bedingungen

$$1)\quad x + y + z = a;$$

$$2)\quad \begin{cases} y + z \geq x, \\ z + x \geq y, \\ x + y \geq z; \end{cases}$$

aus welchen durch Elimination die neuen Bedingungen folgen

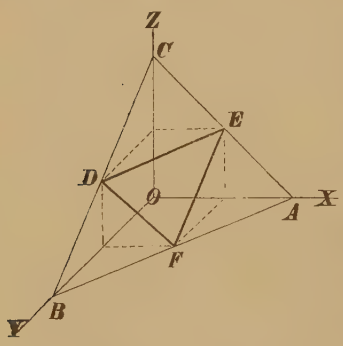
$$3)\quad x \leq \frac{a}{2},\quad y \leq \frac{a}{2},\quad z \leq \frac{a}{2}.$$

Die vorliegende Aufgabe fällt also mit der vorigen überein, wenn $b = \frac{a}{2}$ gesetzt wird; mit dieser Substitution liefert aber sowohl Gleichung 1) als 2) in Nr. 12

$$p = \frac{1}{4}.$$

Zweite Lösung. Werden x, y, z als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes im Raume angesehen, so repräsentiert Gleichung 1) das ebene Dreieck ABC (Fig. 4), dessen Ecken in der Entfernung a von O liegen, während den Relationen 3) für das untere Zeichen Ebenen entsprechen, welche den Koordinatenebenen parallel und um $\frac{a}{2}$ von denselben entfernt sind. Die letztgenannten drei Ebenen schneiden aus dem Dreieck ABC das Dreieck DEF aus, welches augenscheinlich an Fläche viermal kleiner ist als ABC.

Fig. 4.



Die Koordinaten aller Punkte des Dreiecks ABC geben alle möglichen und die Koordinaten der Punkte des Dreiecks DEF alle günstigen Fälle; die Wahrscheinlichkeit, nach der gefragt wurde, ist daher $p = \frac{DEF}{ABC} = \frac{1}{4}$.*

14. **Problem VIII.** *Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann aus drei beliebigen, jedoch unter einer gemeinsamen Grenze angenommenen Längen ein Dreieck gebildet werden?*

Erste Lösung. Es sei a die gemeinsame Grenze der drei Längen. Man denke sich dieselbe zunächst in n gleiche Teile geteilt, bezeichne die Grösse eines Teiles mit Δa und

* Vergl. für diese von E. Lemoine aufgestellte Aufgabe die Abhandlung L. Lalanne's im Journal Liouville, 1879, pag. 107 flg., ferner E. Lemoine's Lösung selbst im Bull. de la Soc. Mathém. de France, t. I, pag. 39. — Vergl. auch das Problem in Nr. 120.

setze voraus, die angenommenen drei Längen x, y, z seien Vielfache von Δa; dann hat man die Bedingungen

$$1) \qquad \begin{cases} x = \xi \,.\, \Delta a \leqq a, \\ y = \eta \,.\, \Delta a \leqq a, \\ z = \zeta \,.\, \Delta a \leqq a, \end{cases}$$

oder wegen $a = n \,.\, \Delta a$

$$2) \qquad \xi \leqq n, \quad \eta \leqq n, \quad \xi \leqq n.$$

Die Aufgabe kann dann in folgender Form ausgedrückt werden:

Drei ganze Zahlen ξ, η, ζ, *sämtlich kleiner als* n, *werden willkürlich herausgegriffen; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie Masszahlen der Seiten eines Dreiecks vorstellen können?*

α) Werden Wiederholungen zugelassen, so ist die Anzahl der möglichen Zahlengruppen $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, die verlangte Wahrscheinlichkeit, wenn mit u_n die Anzahl der günstigen Gruppen bezeichnet wird,

$$3) \qquad p_n = \frac{6\,u_n}{n(n+1)(n+2)}.$$

Um u_n zu ermitteln, dehne man die Grenze bis $n+1$ aus; die neu hinzutretenden günstigen Verbindungen, Δu_n an der Zahl, werden sämtlich die neue Zahl $n+1$ enthalten. Stellt man diese an die Spitze, so kann die noch übrige Ambe mit $n+1$ beginnen und mit allen Zahlen von $n+1$ bis 1 schliessen, oder mit n beginnen und mit allen Zahlen von n bis 2 schliessen; ... endlich bei geradem n mit $\frac{n}{2}$ beginnen und schliessen, bei ungeradem n mit $\frac{n+1}{2}$ beginnen und mit $\frac{n+1}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ schliessen. Demnach ist für ein gerades n:

$$4) \quad \Delta u_n = (n+1) + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{1}{4}(n^2 + 4n + 4),$$

für ein ungerades n:

$$5) \quad \Delta u_n = (n+1) + (n-1) + \ldots + 2 = \frac{1}{4}(n^2 + 4n + 3).$$

Es bilden also die Werte von u_n mit geradem Zeiger eine arithmetische Reihe dritter Ordnung mit

$$u_0 = 1, \quad \Delta' u_0 = 3, \quad \Delta'^2 u_0 = 7, \quad \Delta'^3 u_0 = 4,^*$$

so dass für ein gerades n

$$6) \qquad u_n = \frac{4n^3 + 18n^2 + 20n}{48};$$

ebenso ergeben die Werte von u_n mit ungeraden Zeigern eine arithmetische Progression dritter Ordnung mit

$$u_1 = 1, \quad \Delta' u_1 = 6, \quad \Delta'^2 u_1 = 9, \quad \Delta'^3 u_1 = 4,^{**}$$

daher ist für ein ungerades n

$$7) \qquad u_n = \frac{4n^3 + 18n^2 + 20n + 6}{48}.$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke in die Gleichung 3) ergiebt sich für ein gerades n:

$$8) \qquad p_n = \frac{4n^3 + 18n^2 + 20n}{8n(n+1)(n+2)} = \frac{2n+5}{4(n+1)},$$

für ein ungerades n:

$$9) \qquad p_n = \frac{4n^3 + 18n^2 + 20n + 6}{8n(n+1)(n+2)} = \frac{(2n+1)(n+3)}{4n(n+2)}.$$

Die Ausdrücke 6) und 7) lassen sich unter die gemeinschaftliche Form

$$u_n = \frac{4n^3 + 18n^2 + 20n + 3 - 3(-1)^n}{48}$$

bringen, dann schreibt sich für ein beliebiges n

$$p_n = \frac{4n^3 + 18n^2 + 20n + 3 - 3(-1)^n}{8n(n+1)(n+2)}.$$

β) Sind Wiederholungen nicht zulässig, so ist $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ die Anzahl der möglichen Zahlengruppen; wird die Anzahl der günstigen Gruppen mit v_n bezeichnet, so ist

$$10) \qquad p_n = \frac{6v_n}{n(n-1)(n-2)}.$$

---

* $\Delta' u_0 = \Delta u_0 + \Delta u_1 = 1 + 2 = 3, \quad \Delta' u_2 = \Delta u_2 + \Delta u_3 = 4 + 6 = 10,$
$\Delta' u_4 = \Delta u_4 + \Delta u_5 =$ u. s. f.

** $\Delta' u_1 = \Delta u_1 + \Delta u_2 = 2 + 4 = 6, \quad \Delta' u_3 = \Delta u_3 + \Delta u_4 = 6 + 9 = 15,$
$\Delta' u_5 = \Delta u_5 + \Delta u_6 =$ u. s. f.

Erweitert man behufs Bestimmung von v_n die Grenze bis $n+1$, so werden die neu hinzukommenden günstigen Gruppen sämtlich die Zahl $n+1$ enthalten, welche an die Spitze gestellt mit folgenden Amben verbunden werden kann:

$$\begin{aligned} &n \text{ und } n-1,\ n-2, \ldots 2,\\ n-1 \ &\text{„ } n-2,\ n-3, \ldots 3,\\ n-2 \ &\text{„ } n-3,\ n-4, \ldots 4,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

bei geradem n ist also:

11) $$\Delta v_n = (n-2) + (n-4) + \ldots + 2 = \frac{1}{4}(n^2 - 2n),$$

bei ungeradem n:

12) $$\Delta v_n = (n-2) + (n-4) + \ldots + 1 = \frac{1}{4}(n^2 - 2n + 1).$$

Die Werte von v_n mit geraden Indices bilden demnach eine arithmetische Progression dritter Ordnung mit

$$v_0 = 0, \quad \Delta' v_0 = 0, \quad \Delta'^2 v_0 = 1, \quad \Delta'^3 v_0 = 4,^*$$

woraus

13) $$v_n = \frac{4n^3 - 18n^2 + 20n}{48};$$

ebenso stehen die v_n mit ungeraden Zeigern in einer arithmetischen Progression dritter Ordnung mit

$$v_1 = 0, \quad \Delta' v_1 = 0, \quad \Delta'^2 v_1 = 3, \quad \Delta'^3 v_1 = 4,^{**}$$

woraus

14) $$v_n = \frac{4n^3 - 18n^2 + 20n - 6}{48}.$$

Mit diesen Ausdrücken giebt Gleichung 10) für ein gerades n:

15) $$p_n = \frac{4n^3 - 18n^2 + 20n}{8n(n-1)(n-2)} = \frac{2n-5}{4(n-1)},$$

für ein ungerades n:

16) $$p_n = \frac{4n^3 - 18n^2 + 20n - 6}{8n(n-1)(n-2)} = \frac{(2n-1)(n-3)}{4n(n-2)}.$$

* $\Delta' v_0 = \Delta v_0 + \Delta v_1 = 0 + 0 = 0, \quad \Delta' v_2 = \Delta v_2 + \Delta v_3 = 0 + 1 = 1,$
$\Delta' v_4 = \Delta v_4 + \Delta v_5 =$ u. s. f.

** $\Delta' v_1 = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 0 + 0 = 0, \quad \Delta' v_3 = \Delta v_3 + \Delta v_4 = 1 + 2 = 3,$
$\Delta' v_5 = \Delta v_5 + \Delta v_6 =$ u. s. f.

Durch Zusammenziehung ergiebt sich für ein beliebiges n:

$$v_n = \frac{4n^3 - 18n^2 + 20n - 3 + 3(-1)^n}{48},$$

$$p_n = \frac{4n^3 - 18n^2 + 20n - 3 + 3(-1)^n}{8n(n-1)(n-2)}.$$

Der Übergang zum ursprünglichen Problem erfolgt nun dadurch, dass man die Teile Δa unendlich klein, ihre Anzahl n also unendlich gross werden lässt. Aus allen vier Formeln 8), 9), 15), 16) ergiebt sich dadurch derselbe Wert für die verlangte Wahrscheinlichkeit, nämlich $p = \frac{1}{2}$.

Anmerkung. Im Falle α) sowohl als β) bilden unter Voraussetzung eines geraden n die drei aufeinander folgenden Werte

$$p_n, \quad p_{n+1}, \quad p_{n+2}$$

eine arithmetische Progression, im ersten Falle mit der Differenz $\frac{3}{4(n+1)(n+3)}$, im zweiten mit der Differenz $\frac{3}{4(n+1)(n-1)}$.

Zweite Lösung. Die Strecke AB (Fig. 5) stelle die gegebene gemeinsame Grenze vor; AX, AY, AZ seien die drei beliebigen Längen, entstanden durch willkürliche Annahme der Punkte X, Y, Z in AB. Da es von vornherein klar ist, dass die fragliche Wahrscheinlichkeit von der Grösse AB nicht abhängen wird, so ist es erlaubt, die grösste der drei Längen, AZ, als Grenze anzusehen. Setzt man dann $AX = x$, $AY = y$, $AZ = a$, so hat man die einzige Bedingung

Fig. 5.

$$x + y > a.$$

Aber zu jedem Wertepaare x, y, das diese Bedingung erfüllt, gehört ein anderes $a - x$. $a - y$, — man denke nur von Z statt von A aus gemessen — welches sie nicht erfüllt, indem dann

$$(a - x) + (a - y) < a$$

ist; d. h. zu jedem günstigen Falle gehört ein ungünstiger oder die verlangte Wahrscheinlichkeit ist

$$p = \frac{1}{2}.$$

15. **Problem IX.** *Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass aus drei innerhalb gegebener Grenzen* a *und* b *willkürlich gewählten Längen ein Dreieck gebildet werden kann.*

Lösung. Bezeichnet x die kleinste, y die mittlere, z die grösste der drei Längen, so haben die genannten Grössen folgende Bedingungen zu erfüllen:

1) $x \geqq a;$

2) $z \leqq b;$

3) $x \leqq y;$

4) $y \leqq z;$

5) $z \leqq x + y.$

Fasst man x, y, z als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes im Raume auf, so begrenzen die fünf Ebenen, welche durch die Relationen 1) bis 5), wenn darin das untere Zeichen genommen wird, dargestellt sind, ein Pentaeder oder Tetraeder, und alle Punkte innerhalb dieses Körpers besitzen Koordinaten, welche obigen Bedingungen genügen. Der sechsfache Inhalt des Polyeders — mit Rücksicht auf die sechs möglichen Vertauschungen der Buchstaben x, y, z — giebt also die Anzahl der günstigen Fälle, während $(b - a)^3$ die Anzahl der möglichen Fälle ist.

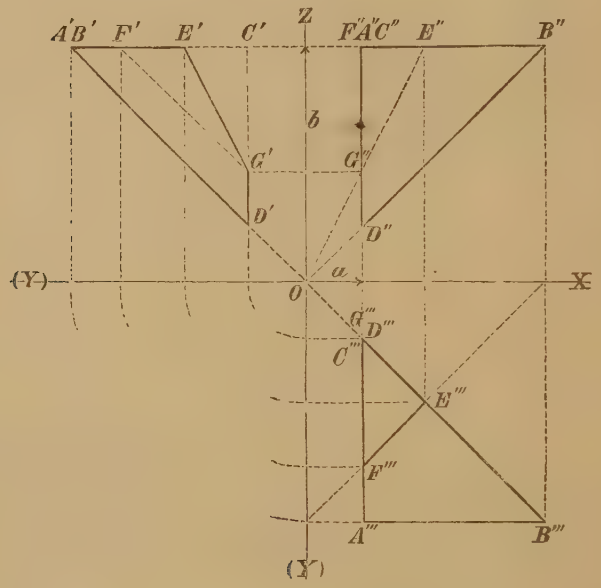
Die Gleichungen 1) bis 4) zunächst führen zu einem Tetraeder $ABCD$, welches in Fig. 6 (S. 20) durch seine Projektionen $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$, $A'''B'''C'''D'''$ auf den drei Koordinatenebenen dargestellt ist. Bezüglich der fünften Ebene 5), deren Spuren in den Ebenen YZ, ZX die Winkel YOZ, ZOX halbieren, können zwei Fälle eintreten.

1. Ist $b > 2a$, wie in dem der Figur zu Grunde gelegten Falle, dann schneidet die Ebene 5) von dem Tetraeder

$ABCD$ ein kleineres Tetraeder $EFCG$ ab und erzeugt so ein Pentaeder.

2. Ist $b < 2a$, so geht die Ebene 5) an dem Tetraeder $ABCD$ vorbei, ohne es zu schneiden, und alle Punkte innerhalb desselben genügen den Bedingungen 1) bis 5).

Fig. 6.



Die zur Berechnung des Rauminhalts erforderlichen Dimensionen sind der Darstellung leicht zu entnehmen.

Das Tetraeder $ABCD$ hat zur Basis das Dreieck $ABC = \frac{1}{2}(b-a)^2$ und zur Höhe $CD = b - a$, sein Inhalt ist also $\frac{1}{6}(b-a)^3$.

Das Tetraeder $EFCG$ hat zur Grundfläche das Dreieck $EFC = \frac{1}{4}(b-2a)^2$ und zur Höhe $CG = b - 2a$, sein Inhalt ist daher $\frac{1}{12}(b-2a)^3$.

Die verlangte Wahrscheinlichkeit ist also

$$1) \quad \begin{cases} \text{für } b > 2a: \\ \qquad p = \frac{1}{2}\left[2 - \left(\frac{b-2a}{b-a}\right)^3\right], \\ \text{für } b < 2a: \\ \qquad p = \left(\frac{b-a}{b-a}\right)^3 = 1; \end{cases}$$

letzteres Resultat wird durch einfache Überlegung bestätigt.*

Anmerkung. Das vorige Problem VIII ergiebt sich als besonderer Fall des vorliegenden, wenn man die untere Grenze a verschwinden lässt. In der That giebt Formel 1) für $a = 0$ wieder $p = \frac{1}{2}$.

16. **Problem X.** *Eine gegebene Gerade wird willkürlich in drei Teile geteilt; es ist die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass aus den Abschnitten ein spitzwinkliges Dreieck gebildet werden kann.*

Lösung. In andere Worte gekleidet lautet das Problem: In einer gegebenen Geraden sind zwei Punkte beliebig angenommen; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Quadrat eines jeden der drei Abschnitte kleiner ist als die Summe der Quadrate der beiden anderen?

Bezeichnet P die verlangte, Q die Wahrscheinlichkeit, dass das Quadrat des mittleren Abschnittes grösser als die Summe der Quadrate der beiden andern ist, so ist

$$1) \qquad P = 1 - 3Q.$$

Sind ferner X, Y die beiden in der Geraden $AB = a$ beliebig gewählten Punkte, x, y ihre Abstände von A, so können bezüglich der gegenseitigen Lage von X und Y zwei Fälle eintreten: X ist weiter von A entfernt als Y, dann sind y, $x - y$, $a - x$ die Längen der drei Abschnitte; oder X liegt näher an A als Y, dann sind die Abschnitte x, $y - x$, $a - y$. Wenn nun q die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass

---

* Vergl. L. Lalanne's Abhandlung „De l'emploi de la Géométrie pour résoudre certaines questions de moyennes et de probabilités" in Liouville's Journal 1879, pag. 107 flg.

im ersten der genannten, gegenseitig sich ausschliessenden Fälle die Bedingung

$$2) \qquad (x-y)^2 > y^2 + (a-x)^2$$

erfüllt ist, so gilt diese Wahrscheinlichkeit auch für die analoge Bedingung im zweiten Falle, oder es ist $Q = 2q$, daher

$$3) \qquad P = 1 - 6q.$$

Aus der oben angeschriebenen Bedingung folgt aber

$$y < a - \frac{a^2}{2x};$$

y darf also zwischen den Grenzen 0 und $a - \frac{a^2}{2x}$ oder innerhalb eines Intervalls von der Ausdehnung $a - \frac{a^2}{2x}$ enthalten sein, und da alle Werte von y zwischen 0 und a gleich möglich sind, so ist

$$1 - \frac{a}{2x}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Bedingung 1) erfüllt ist. Multipliziert man dies mit $\frac{dx}{a}$, der Wahrscheinlichkeit, dass X die Entfernung x von A besitzt, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, mit welcher die Beziehung 1) bei dem besonderen Werte x erfüllt ist.

Um q zu erhalten, hätte man also den Ausdruck

$$\left(1 - \frac{a}{2x}\right)\frac{dx}{a}$$

auf dem ganzen Wertgebiete von x, d. i. von 0 bis a zu integrieren. Nun ist aber zu beachten, dass der Ausdruck $1 - \frac{a}{2x}$, der eine Wahrscheinlichkeit vorstellt, für Werte von x zwischen 0 und $\frac{a}{2}$ negativ wird; dieser negative Wert ist jedoch gleich Null zu achten, weil, wenn $x < \frac{a}{2}$, die Summe der beiden ersten Abschnitte $(y, x-y)$ kleiner als der dritte $(a-x)$, daher überhaupt kein Dreieck möglich ist. Auf Grund dieser Bemerkung ist

4) $$q = \int_{\frac{a}{2}}^{a} \left(1 - \frac{a}{2x}\right) \frac{dx}{a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} l \,.\, 2$$

und nach Gleichung 3) das gesuchte

5) $$P = 3l \,.\, 2 - 2.$$

17. Anmerkung. Der bei der Lösung obigen Problems beobachtete Fall, dass die Funktion, welche eine von einer oder mehreren Variabeln abhängige Wahrscheinlichkeit ausdrückt, das Wertgebiet der positiven echten Brüche verlässt, wiederholt sich bei der analytischen Behandlung analoger Aufgaben häufig. Das Negativwerden der Funktion deutet dann darauf hin, dass das fragliche Ereignis bei dem betreffenden Werte der Variabeln nicht eintreffen kann, während ein die positive Einheit übersteigender Wert anzeigt, dass das Ereignis notwendig eintreffen muss.

Für solche Fälle hat Hugh M'Coll im XV. Bande der „Educational Times", pag. 20 flg., ein Verfahren angegeben, dessen Grundzüge hier kurz entwickelt werden sollen, um es später bei einigen Aufgaben in Anwendung bringen zu können.

1. Mit dem Symbol $\int_a^b \varphi(x) \,.\, px$ soll der Grenzwert bezeichnet werden, welchem die Summe $\sum_a^b \varphi(x) \,.\, \Delta x$ bei unendlich abnehmendem Δx, daher unendlich zunehmender Gliederzahl sich nähert, vorausgesetzt, dass für negative Werte von $\varphi(x)$ die Null, für positive, die Einheit überragende Werte von $\varphi(x)$ die Einheit gesetzt wird.

Aus dieser Definition ergeben sich unmittelbar die folgenden Formeln.

Ist zwischen den Grenzen a und b beständig $\varphi(x) < 0$, so ist

$$\int_a^b \varphi(x) \,.\, px = \int_a^b 0 \,.\, dx = 0.$$

Bleibt $\varphi(x)$ auf dem bezeichneten Wertgebiet ein echter Bruch, so ist

$$\int_a^b \varphi(x) \,.\, px = \int_a^b \varphi(x) \,.\, dx,$$

das Zeichen px kann also durch dx ersetzt werden.

Ist $\varphi(x)$ zwischen den Integrationsgrenzen beständig positiv und grösser als 1, so ist

$$\int_a^b \varphi(x) \,.\, px = \int_a^b 1 \,.\, dx = b - a.$$

Treten mehrere der angeführten Fälle zusammen auf, so ist das Integrationsintervall entsprechend zu zerlegen.

2. Dies vorausgeschickt bezeichne $\varphi(x)$ für jeden Wert von x zwischen a und b die Wahrscheinlichkeit eines von x abhängenden Ereignisses; nachdem $\frac{dx}{b-a}$ die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten, zwischen a und b gelegenen Wertes von x ist, so bedeutet $\varphi(x) \,.\, \frac{dx}{b-a}$ die Wahrscheinlichkeit, dass mit diesem besonderen Werte von x das erwartete Ereignis eintreffen werde, und

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(x) \,.\, px$$

die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses bei einem willkürlich innerhalb der bezeichneten Grenzen gewählten Werte von x.

3. Ändert die Funktion $\varphi(x)$ auf dem Wertgebiete von x ihre Form, und gilt $\varphi_1(x)$ für Werte von x zwischen a_1 und a_2, $\varphi_2(x)$ für Werte von x zwischen a_2 und a_3, $\ldots$ $\varphi_{n-1}(x)$ endlich für Werte von x zwischen a_{n-1} und a_n, dann ist die Wahrscheinlichkeit des erwarteten Ereignisses für einen zwischen a_1 und a_n beliebig angenommenen Wert von x gleich

$$\frac{1}{a_n - a_1} \left\{ \int_{a_1}^{a_2} \varphi_1(x) \,.\, px + \int_{a_2}^{a_3} \varphi_2(x) \,.\, px + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} \varphi_{n-1}(x) \,.\, px \right\}.$$

4. Hängt die zu bestimmende Wahrscheinlichkeit von mehreren, innerhalb gegebener Grenzen unabhängig ver-

änderlichen Grössen ab, so gehe man so vor, als ob zunächst alle Variabeln, bis auf eine, gegebene Werte hätten, und suche die Wahrscheinlichkeit für einen willkürlich angenommenen Wert dieser einen Variabeln auf. Mit dieser Wahrscheinlichkeit gehe man in Bezug auf eine zweite Variable ebenso vor und so fort, bis alle Variabeln eliminiert sind und die Wahrscheinlichkeit in gegebenen Zahlen ausgedrückt ist.

In Anwendung dieser Regeln auf das Problem X hätte sich die Rechnung für q so gestellt:

$$q = \frac{1}{a}\int_0^a \left(1 - \frac{a}{2x}\right) . px = \frac{1}{a}\left\{\int_0^{\frac{a}{2}} 0 \, . \, dx + \int_{\frac{a}{2}}^a \left(1 - \frac{a}{2x}\right) dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} l \, . \, 2.$$

18. **Problem XI.** *Eine Gerade von gegebener Länge* a *wird willkürlich in vier Teile geteilt. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die Summe der Quadrate irgend dreier Teile kleiner ist als das Quadrat des vierten Teiles.*

Lösung. Die vier Teile mögen mit $x, y, z, a - x - y - z$ bezeichnet werden. Jeder derselben kann zwischen 0 und a liegen, daher die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Wertkombination

$$1) \qquad 6 \frac{dx}{a} \cdot \frac{dy}{a} \cdot \frac{dz}{a} = \frac{6}{a^3} dx\, dy\, dz,$$

entsprechend der Anzahl Vertauschungen der Buchstaben x, y, z. Die günstigen Kombinationen haben der Bedingung

$$2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leqq (a - x - y - z)^2$$

und noch drei ähnlich gestalteten Bedingungen zu entsprechen, deren jede mit derselben Wahrscheinlichkeit erfüllt wird. Es genügt daher, die Wahrscheinlichkeit für eine dieser Bedingungen, z. B. für die angeschriebene, zu ermitteln und zu vervierfachen.

Aus 2) folgen die weiteren Beziehungen:

$$3) \quad \begin{cases} z \leqq \dfrac{(a-x-y)^2 - x^2 - y^2}{2(a-x-y)} = z', \\ y \leqq \dfrac{(a-x)^2 - x^2}{2(a-x)} = y', \\ x \leqq \dfrac{1}{2}a. \end{cases}$$

Die erste ergiebt sich durch Auflösung von 2) nach z, die zweite aus der Forderung, dass die Grenze z' von z ein positiver Betrag, ebenso die dritte aus der Forderung, dass die Grenze y' von y positiv sein muss. Die vollständige Wahrscheinlichkeit wird also erhalten, indem man das Integral des Ausdrucks 1), über das durch die Relationen 3) begrenzte Wertgebiet ausgedehnt, mit 4 multipliziert, d. h. es ist:

$$p = \frac{24}{a^3} \int_0^{\frac{1}{2}a} \int_0^{y'} \int_0^{z'} dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{24}{a^3} \int_0^{\frac{1}{2}a} dx \int_0^{y'} \frac{(a-x-y)^2 - x^2 - y^2}{2(a-x-y)}\,dy.$$

Zerlegt man die unecht gebrochene Funktion in die Bestandteile

$$(a-x) + \frac{1}{2}\,\frac{(a-x)^2 + x^2}{y - a + x},$$

so wird weiter:

$$p = \frac{12}{a^3} \int_0^{\frac{1}{2}a} \left[(a-x)^2 - x^2 + \{(a-x)^2 + x^2\}\, l \cdot \frac{(a-x)^2 + x^2}{2(a-x)^2} \right] dx$$

$$= 3 + \frac{12}{a^3} \int_0^{\frac{1}{2}a} \{(a-x)^2 + x^2\}\, l \cdot \frac{(a-x)^2 + x^2}{2(a-x)^2}\,dx,$$

und durch partielle Integration, indem

$$\{(a-x)^2+x^2\}\,dx = du, \quad l\,.\,\frac{(a-x)^2+x^2}{2(a-x)^2} = v$$

gesetzt wird, ergiebt sich endlich leicht

4) $$p = 6 + \pi - 12l\,.\,2.$$

19. **Problem XII.** *Von* n *gleichlangen Strecken wird je ein Stück willkürlich abgeschnitten; die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die* r^te *Potenz der Masszahl des grössten Stückes grösser ist als die Summe der* r^ten *Potenzen der Masszahlen der übrigen Stücke.*

Lösung. Die gemeinsame Länge der gegebenen Strecken als Einheit genommen seien $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Längen der abgeschnittenen Stücke. Die Wahrscheinlichkeit irgend einer Wertverbindung derselben ist $dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$.

Angenommen, das erste Stück sei das grösste, so soll

1) $$x_2^r + x_3^r + \ldots + x_n^r < x_1^r,$$

und da jedes Stück mit derselben Wahrscheinlichkeit das grösste sein kann, so braucht die aus obiger Annahme resultierende Wahrscheinlichkeit nur $n$fach genommen zu werden; die vollständige Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses ist demnach

2) $$p = n\int_0^1 dx_1 \int\int \ldots \int dx_2\,dx_3 \ldots dx_n,$$

das vielfache Integral auf das durch 1) charakterisierte Wertgebiet der Variabeln ausgedehnt. Mit den Substitutionen

$$x_2^r = x_1^r \xi_2, \quad x_3^r = x_1^r \xi_3, \ldots x_n^r = x_1^r \xi_n$$

wird

$$p = \frac{n}{r^{n-1}}\int_0^1 x_1^{n-1} dx_1 \int\int \cdots \int (\xi_2\,\xi_3 \ldots \xi_n)^{\left(\frac{1}{r}-1\right)} d\xi_2 d\xi_3 \ldots d\xi_n,$$

das vielfache Integral nunmehr ausgedehnt über alle positiven Wertverbindungen der neuen Variablen $\xi_2, \ldots \xi_n$, die mit der Beziehung

3) $$\xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_n < 1$$

verträglich sind. Der Wert dieses Integrals ist*

$$\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\right\}^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{r}+1\right)},$$

und da ferner

$$\int_0^1 x_1^{n-1} dx_1 = \frac{1}{n},$$

so ist schliesslich

4) $$p = \frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\right\}^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{r}+1\right)}.$$

Für $r = 1$ erhält man aus der allgemeinen Formel 4):

5) $$p_1 = \frac{\{\Gamma(1)\}^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{1}{(n-1)!}$$

und ist insbesondere 3 die Anzahl der Strecken, so wird

---

* Nach Einführung der Grenzen lautet das Integral

1) $$J = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} \int_0^{1-\xi_2-\xi_3} \cdots \int_0^{1-\xi_2-\xi_3-\ldots\xi_{n-1}} (\xi_2\,\xi_3 \ldots \xi_n)^{\frac{1}{r}-1} d\xi_2\, d\xi_3 \ldots d\xi_n.$$

Von dem allgemeineren dreifachen Integral

$$J' = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1}\, dx\, dy\, dz$$

ausgehend, ergiebt sich durch successive Ausführung der Integrationen unter Anwendung der leicht zu erweisenden Formel

$$\int_0^a x^{l-1}(a-x)^{m-1} dx = a^{l+m-1} \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}$$

zunächst

2) $$\begin{cases} J' = \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_0^1 x^{l-1} dx \int_0^{1-x} y^{m-1}(1-x-y)^n dy \\ = \dfrac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)} \cdot \dfrac{\Gamma(m)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)} \displaystyle\int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m+n} dx \\ = \dfrac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)} \cdot \dfrac{\Gamma(m)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)} \cdot \dfrac{\Gamma(l)\,\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(l+m+n+1)} \\ = \dfrac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n+1)}, \end{cases}$$

$$p_1^{(3)} = \frac{1}{2};$$

offenbar ist dies die Wahrscheinlichkeit, dass aus drei unter einer gemeinsamen Grenze angenommenen Längen kein Dreieck gebildet werden kann.*

Für $r = 2$ ergiebt sich aus Gleichung 5)

$$p_2 = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\pi\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

und für drei Strecken insbesondere

$$p_2^{(3)} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4}\pi;$$

es ist dies zugleich die Wahrscheinlichkeit, dass aus drei unter einer gemeinschaftlichen Grenze beliebig angenommenen Strecken ein stumpfwinkliges Dreieck gebildet werden kann, weshalb die Wahrscheinlichkeit eines spitzwinkligen Dreiecks unter denselben Bedingungen gleichkommt**

$$q_2^{(3)} = 1 - p_2^{(3)} = 1 - \frac{1}{4}\pi.$$

---

und es ist klar, dass dieser Vorgang auf beliebig viele Variable ausgedehnt werden kann, wodurch man erhalten würde:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \cdots \int_0^{1-x-y-\ldots-u} x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} \ldots v^{s-1}\, dx\, dy\, dz \ldots dv = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n) \ldots \Gamma(s)}{\Gamma(l+m+n+\ldots+s+1)}.$$

Das Integral J, Gleichung 1), um dessen Ermittelung es sich handelt, ergiebt sich als besonderer Fall des vorliegenden, und zwar wenn

$$l = m = n = \ldots = \frac{1}{r}$$

gesetzt wird; mithin ist thatsächlich

$$J = \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\right\}^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{r}+1\right)}.$$

* Vergl. Problem VIII, Nr. 14.

** Vergl. hiermit Problem X, Nr. 16.

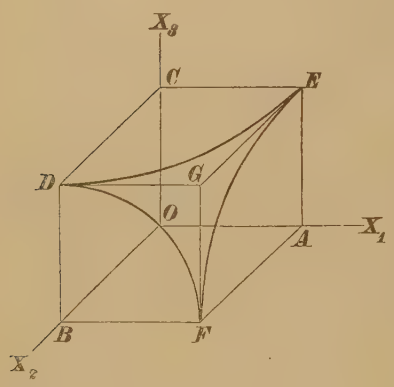
Die beiden letzten Resultate können leicht auf geometrischem Wege verifiziert werden. Der Gesamtheit der Verbindungen positiver Werte der Variabeln x_1, x_2, x_3, welche durch

$$x_1 < 1, \quad x_2 \leqq 1, \quad x_3 \leqq 1$$

charakterisiert wird, entspricht geometrisch ein Würfel OG (Fig. 7) von der Seitenlänge 1; die Gesamtheiten positiver Wertverbindungen derselben Variabeln, welche den Bedingungen

$$x_1^2 \geqq x_2^2 + x_3^2, \quad x_2^2 \geqq x_3^2 + x_1^2, \quad x_3^2 \geqq x_1^2 + x_2^2$$

Fig. 7.



genügen, werden geometrisch durch drei Kegel dargestellt, welche in O ihren gemeinschaftlichen Scheitel haben und deren Grundflächen die Kreisquadranten AEF, BFD, CDE sind. Daraus folgt für die Wahrscheinlichkeit, dass eine der obigen Bedingungen erfüllt ist, oder dass aus den Strecken x_1, x_2, x_3 ein stumpfwinkliges Dreieck sich bilden lässt, der Ausdruck

$$\frac{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}$$

wie oben.

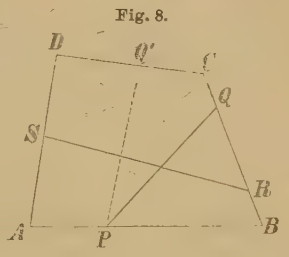
20. **Problem XIII.** *In dem Umfange eines gegebenen Vierecks werden vier Punkte beliebig angenommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit schneiden sich ihre Verbindungslinien innerhalb des Vierecks?*

Lösung. $ABCD$ (Fig. 8) sei das gegebene Viereck, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$.

1. Man denke sich zuerst zwei der Punkte, P, Q, in benachbarten Seiten angenommen und setze $BP = x$, $BQ = y$. Wird nun ein dritter Punkt R beliebig in BQ gewählt, so

kann der vierte Punkt S, wenn PQ und RS innerhalb des Vierecks sich schneiden sollen, in dem Linienzug $PADC$, dessen Länge $c+d+a-x$ ist, willkürlich angenommen werden. Die Anzahl solcher Linien RS wird durch $(c+d+a-x)\,y$ gemessen. — Wird der dritte Punkt R in PB angenommen, so tritt ein günstiger Fall ein, wenn S auf den Linienzug $ADCQ$ fällt, dessen Länge $c+d+b-y$ ist. Die Anzahl solcher Geraden RS ist $(c+d+b-y)\,x$.

Fig. 8.



Da endlich die Anzahl der Linien PQ, welche auf BA, BC die Abschnitte x, y bilden, durch $dx\,dy$ ausgedrückt wird, so ist die aus dieser Annahme hervorgehende Anzahl günstiger Fälle

$$1)\quad \begin{cases} \int_0^a \int_0^b \{(c+d+a-x)y+(c+d+b-y)x\}\,dx\,dy \\ \qquad = \frac{1}{2}ab\{ab+(a+b)(c+d)\}. \end{cases}$$

Ähnliche Ausdrücke für die übrigen drei Paare zusammenstossender Seiten ergeben sich durch cyklische Vertauschung der Buchstaben, nämlich:

$$2)\quad \frac{1}{2}bc\{bc+(b+c)(d+a)\},$$

$$3)\quad \frac{1}{2}cd\{cd+(c+d)(a+b)\},$$

$$4)\quad \frac{1}{2}da\{da+(d+a)(b+c)\}.$$

2. Nun mögen die zwei ersten Punkte, P, Q', auf gegenüberliegende Seiten, AB, CD, fallen; es sei dann $CQ'=z$. Je nachdem nun der dritte Punkt R auf BP, BC, CQ' zu liegen kommt, werden die günstigen Lagen von S durch

$$d+c-z,\quad a+c+d-x-z,\quad a+d-x$$

beziehungsweise gezählt. Die aus dieser zweiten Annahme hervorgehende Anzahl günstiger Fälle ist demnach:

$$5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^a \int_0^c \{(d+c-z)x+(a+c+d-x-z)b+(a+d+x)z\}\,dx\,dz \\ &\qquad = \frac{1}{2}ac\{ac+2bd+(a+c)(b+d)\}. \end{aligned} \right.$$

Werden P, Q' in dem anderen Paar gegenüberstehender Seiten angenommen, so entstehen:

$$6)\qquad \frac{1}{2}bd\{bd+2ca+(b+d)(c+a)\}$$

günstige Fälle.

Damit sind die günstigen Fälle erschöpft; nur müssen die Ausdrücke 1) bis 6) mit 4 multipliziert werden, da P mit Q und R mit S vertauscht werden kann.

Da nun die möglichen Fälle durch $(a+b+c+d)^4$ gezählt werden, so ist die verlangte Wahrscheinlichkeit:

$$p = \frac{2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2-4abcd}{(a+b+c+d)^4}.$$

Für ein Parallelogramm, wo $a=c$, $b=d$ ist, wird

$$p = \frac{(a^2+4ab+b^2)^2-2a^2b^2}{8(a+b)^4}$$

und für einen Rhombus:

$$p = \frac{17}{64}.$$

21. **Problem XIV.** *In jeder Seite eines regulären Dreiecks wird ein Punkt beliebig angenommen. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die drei Punkte ein spitzwinkliges Dreieck bestimmen.*

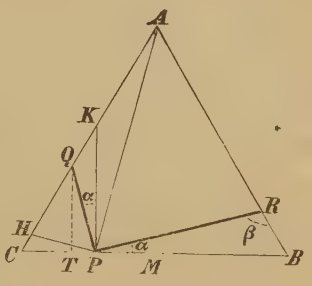
Lösung. Wir fragen zunächst nach der Wahrscheinlichkeit, dass an einem der drei Punkte, z. B. bei P in BC (Fig. 9), ein stumpfer Winkel entsteht; heisst diese q, so ist die verlangte Wahrscheinlichkeit:

$$1)\qquad p = 1-3q.$$

Offenbar genügt es, den Punkt P zunächst auf die Hälfte CM der Seite BC zu beschränken. Zum Zwecke der Zählung der günstigen Fälle verbinde man P mit A, führe PH rechtwinklig zu PA, PK senkrecht zu BC.

Nun sei Q ein beliebiger Punkt in AC; verbindet man ihn mit P und zieht PR rechtwinklig zu PQ, so ist ohne Mühe zu erkennen, dass bei P ein stumpfer Winkel entsteht, wenn der dritte Punkt S in die Strecke BR fällt. Bezüglich der Lage von Q sind aber drei Fälle zu unterscheiden: ist Q in CH, so ist jede Lage von S in AB günstig; fällt Q in die Strecke HK, so wird die Anzahl der günstigen Lagen von S, wie schon erwähnt, durch BR gemessen; fällt endlich Q in den Abschnitt KA, so giebt es keine günstige Lage von S.

Fig. 9.



Wird $CP = x$, $CQ = y$, $BC = CA = AB = 1$ gesetzt, so ergiebt sich für die Anzahl der dem Entstehen eines stumpfen Winkels bei P günstigen Kombinationen der drei Punkte, wenn P alle Lagen in CM annimmt, der Ausdruck

$$\int_0^{\frac{1}{2}} CH \,.\, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{CH}^{CK} BR \,.\, dx\, dy;$$

die gleiche Menge günstiger Fälle erhält man für die Lagen von P in MB, und da die Anzahl der möglichen Fälle $1 \,.\, 1 \,.\, 1 = 1$ beträgt, so ist

$$2) \qquad q = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} [CH + \int_{CH}^{CK} BR \,.\, dy]\, dx.$$

Für den Augenblick sei Winkel $BPR = \alpha$, Winkel $BRP = \beta$, so folgt aus dem Dreieck BPR

$$3) \qquad BR = (1 - x) \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Aus dem Dreieck KPQ, wo $QK = CK - CQ = 2x - y$ und Winkel $QKP = 30^0$ ist, folgt

$$4) \qquad \sin \alpha = \frac{2x - y}{2 \,.\, PQ};$$

durch Vergleichung der Winkel in den Dreiecken BPR und CPQ ergiebt sich weiter

$$\beta + \alpha = \angle\, CQP + \angle\, CPQ,$$

oder

$$\beta + \alpha = 30^0 + \alpha + \angle\, CPQ,$$

woraus

$$\beta = 30^0 + \angle\, CPQ$$

und

$$\sin\beta = \frac{1}{2}\cos CPQ + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin CPQ;$$

darin ist

$$\sin CPQ = \frac{QT}{PQ} = \frac{y\sqrt{3}}{2\,.\,PQ},\quad \cos CPQ = \frac{PT}{PQ} = \frac{x - \frac{y}{2}}{PQ} = \frac{2x - y}{2\,.\,PQ}$$

zu setzen, wodurch

$$5)\qquad \sin\beta = \frac{x + y}{2\,.\,PQ}$$

wird. Substituiert man die Werte aus 4) und 5) in die Gleichung 3), so ergiebt sich

$$6)\qquad BR = \frac{(1 - x)(2x - y)}{x + y}.$$

Fällt R nach A, so kommt Q nach H; daher ist CH derjenige Wert von y, welcher sich ergiebt, wenn man den Ausdruck für BR der Einheit gleich setzt, d. h.

$$7)\qquad CH = y_1 = 2x + 3 + \frac{6}{2 - x};$$

endlich ist

$$8)\qquad CK = y_2 = 2x.$$

Setzt man die Werte aus 6), 7), 8) in Gleichung 2) ein, so wird:

$$9)\quad \begin{cases} q = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ y_1 + \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{3x(1-x)}{x+y} - 1 + x \right) dy \right\} dx \\ = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ y_1 + 3x(1-x)\, l \cdot \frac{x + y_2}{x + y_1} - (1-x)(y_2 - y_1) \right\} dx \\ = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ 3x(1-x)\, l \cdot \frac{2-x}{1-x} - x \right\} dx \\ = \frac{3}{2} + \frac{9}{2}\, l \cdot \frac{3}{4}; \end{cases}$$

der erste Teil des letzten Integrals ist durch partielle Integration leicht ausgerechnet.

Demnach ist schliesslich die verlangte Wahrscheinlichkeit nach Gleichung 1)

$$10) \qquad p = 1 - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} l \cdot \frac{27}{64} = 1 - \frac{9}{2} l \cdot \left(\frac{27}{64} e\right).$$

22. **Problem XV.** *Auf dem Umfange einer Ellipse werden drei Punkte beliebig angenommen. Es ist die Bedingung aufzusuchen, unter welcher aus den Krümmungshalbmessern dieser Punkte mit Gewissheit ein Dreieck gebildet werden kann.*

Lösung. Werden die Krümmungshalbmesser der drei Punkte mit ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 bezeichnet, so muss

$$\varrho_1 + \varrho_2 > \varrho_3$$

nebst zwei ähnlichen Bedingungen erfüllt sein. Sind a, b die Halbaxen der Ellipse, so ist $\frac{a^2}{b}$ der grösste, $\frac{b^2}{a}$ der kleinste Wert von ϱ; die Bedingungen der Aufgabe sind daher gewiss erfüllt, wenn

$$\frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a} > \frac{a^2}{b},$$

oder

$$\frac{b^3}{a^3} > \frac{1}{2},$$

oder, wenn die numerische Excentrizität

$$\varepsilon < \left(1 - 2^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

23. **Problem XVI.** *An eine Ellipse, dargestellt durch die Gleichungen*

$$x = a \cos\theta, \quad y = b \sin\theta,$$

werden in zwei Punkten, welche zu willkürlichen Werten von θ gehören, Tangenten geführt. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass der Schnittpunkt dieser Tangenten auf eine Ringfläche fällt, welche von zwei gegebenen, mit der ersten Ellipse ähnlichen, ähnlich liegenden konzentrischen Ellipsen begrenzt wird.

Lösung. Die Gleichungen der drei Ellipsen können in der Form geschrieben werden:

1) $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \quad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = sec^2\alpha, \quad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = sec^2\beta.$

Sind θ_1, θ_2 die Argumente der beiden auf der ersten Ellipse beliebig angenommenen Punkte, so haben die Tangenten in diesen Punkten die Gleichungen:

$$y = -\frac{b}{a} cotg\,\theta_1 \,.\, x + \frac{b}{sin\,\theta_1},$$

$$y = -\frac{b}{a} cotg\,\theta_2 \,.\, x + \frac{b}{sin\,\theta_2}$$

und ihr Schnittpunkt die Koordinaten:

$$x = a\frac{cos\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)}{cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)}, \quad y = b\frac{sin\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)}{cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)};$$

er liegt daher auf der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = sec^2\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2).$$

Ein günstiger Fall ergiebt sich, so oft diese Ellipse zwischen die beiden letzten in 1) zu liegen kommt, d. h. wenn

$$\alpha < \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) < \beta,$$

oder

$$\theta_1 - 2\beta < \theta_2 < \theta_1 - 2\alpha.$$

Aus dieser Bedingung folgt die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{\int_0^{2\pi}\int_{\theta_1-2\beta}^{\theta_1-2\alpha} d\theta_1\, d\theta_2}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_1} d\theta_1\, d\theta_2} = \frac{2(\beta-\alpha)}{\pi};$$

Zähler und Nenner geben hier nur die halbe Anzahl der günstigen und möglichen Fälle an, weil beide unter der Voraussetzung $\theta_1 > \theta_2$ gebildet sind.

Für $\alpha = 0$ und $\beta = \frac{\pi}{2}$ wird, wie es sein muss, $p = 1$.

24. Die jetzt folgenden Probleme dieses Abschnittes behandeln Wahrscheinlichkeiten, welche nicht als geometrische

im engeren Sinne zu bezeichnen sind, aber insofern hierher gehören, als sie von stetig veränderlichen Grössen, insbesondere von Zahlen, abhängen. Wie bereits in Nr. 6 erwähnt worden ist, entspricht einer willkürlich angenommenen Zahl geometrisch ein beliebiger Punkt in einer gegebenen Geraden, und von diesem Gesichtspunkte aus sollen die Aufgaben hier eingereiht werden.

25. **Problem XVII.** *Es ist die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die Gleichung* $z^2 + pz + q = 0$ *reelle Wurzeln besitzt, wenn ihre Koeffizienten* p, q *jeden beliebigen Wert zwischen den gegebenen Grenzen* $\pm P$, *bezichungsweise* $\pm Q$ *annehmen können.*

Lösung. Betrachtet man die Werte von p, q als Koordinaten x, y eines Punktes einer Ebene, so entsprechen den Wertverbindungen der Koeffizienten Punkte eines Rechtecks, dessen Ecken die Koordinaten $\pm P, \pm Q$ haben; die Fläche dieses Rechtecks, $4PQ$, ist ein Mass für die Anzahl der möglichen Fälle.

Die Reellität der Wurzeln ist aber an die Beziehung

$$q \leq \frac{1}{4}p^2 \text{ oder } y \leq \frac{1}{4}x^2$$

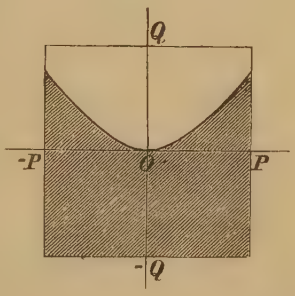
gebunden, welche, wenn man das untere Zeichen ins Auge fasst, eine Parabel repräsentiert, die das erwähnte Rechteck der möglichen Fälle in ein Gebiet der günstigen und ein Gebiet der ungünstigen Fälle scheidet.

α) Ist $Q > \frac{1}{4}P^2$, so hat die Parabel die in Fig. 10 angedeutete Lage und das (schraffierte) Gebiet der günstigen Fälle den Inhalt

$$2PQ + 2 \cdot \frac{1}{3}P\frac{1}{4}P^2 = 2PQ + \frac{1}{6}P^3,$$

die Wahrscheinlichkeit, um die gefragt worden, ist für diesen Fall

Fig. 10.



$$1) \qquad \Pi = \frac{P^2 + 12Q}{24Q}.$$

β) Für den Fall $Q < \frac{1}{4}P^2$ nimmt die Parabel die in Fig. 11 (S. 38) angedeutete Lage an, das Gebiet der günstigen Fälle hat den Inhalt

$$4PQ - 2 \cdot \frac{2}{3} Q \,.\, 2\sqrt{Q} = 4PQ - \frac{8}{3} Q\sqrt{Q},$$

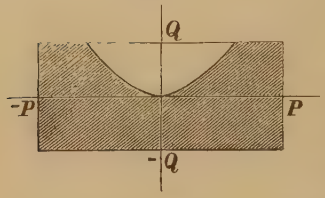
die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist

2) $$\Pi = 1 - \frac{2}{3}\frac{\sqrt{Q}}{P}.$$

Für den Grenzfall $Q = \frac{1}{4}P^2$ liefern die Formeln 1), 2) denselben Wert, $\Pi = \frac{2}{3}$.

Der besondere Fall $P = Q = 1$ ist nach Formel 1) zu behandeln, welche $\Pi = \frac{13}{24}$ ergiebt.*

Fig. 11.



26. **Problem XVIII.** *Eine quadratische Gleichung von der Form* $ax^2 + bx + c = 0$ *wird zufällig, jedoch mit reellen Koeffizienten, hingeschrieben. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihre Wurzeln reell sind?*

Lösung. Zur Lösung dieser Aufgabe könnte ein ähnlicher Weg eingeschlagen werden wie bei der vorigen, und man würde dadurch zu stereometrischen Beziehungen geführt werden. Nachstehend ist eine analytische Lösung auf Grund des von Hugh M'Coll angegebenen Verfahrens (s. Nr. 17) mitgeteilt.

Das Imaginärwerden der Wurzeln der vorgelegten Gleichung ist an zwei und nur zwei Bedingungen geknüpft: 1. dass a und c gleich bezeichnet sind — die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $\frac{1}{2}$; 2. dass b numerisch kleiner ist als $2\sqrt{ac}$ — die zugehörige Wahrscheinlichkeit heisse q. Dann ist

---

* Den hier eingeschlagenen Weg zur Lösung der vorstehenden Aufgabe hat L. Lalanne in der bereits a. a. O. (Nr. 16) citierten Abhandlung im Journal Liouville 1879 angegeben, die hier getroffene Unterscheidung der Fälle α), β) jedoch nicht durchgeführt und Formel 1) irrtümlich als für alle Werte von P, Q giltig hingestellt.

1) $$Q = \frac{1}{2} \cdot q$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die angeschriebene Gleichung imaginäre Wurzeln besitzt. Es bleibt also nur übrig, q unter Voraussetzung positiver Werte von a, b, c zu ermitteln.

Zunächst mögen alle drei Zahlen eine gemeinsame endliche Grenze n haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein willkürlich angenommener Wert von b bei besonderen Werten von a und c die zweite Bedingung erfüllt, ist unter dieser Voraussetzung ausgedrückt durch

2) $$\frac{2\sqrt{ac}}{n} \cdot \frac{da}{n} \cdot \frac{dc}{n};$$

denn $\frac{2\sqrt{ac}}{n}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass b einen Wert zwischen 0 und $2\sqrt{ac}$ besitzt, und $\frac{da}{n}$, $\frac{dc}{n}$ sind die Wahrscheinlichkeiten der besonderen Werte von a, c. Die vollständige Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Bedingung bei beliebigen Werten aller drei Zahlen a, b, c befriedigt ist, kommt gleich

3) $$q = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{pa}{n} \int_0^n \frac{2\sqrt{ac}}{n} \cdot pc;$$

für da, dc werden die Symbole pa, pc gesetzt, weil erst untersucht werden muss, inwieweit die unter dem Integral stehende Funktion ein echter Bruch ist.

Es ist

$$\frac{2\sqrt{ac}}{n} < 1,$$

solange

$$c \leqq \frac{n^2}{4a}.$$

Diese Bedingung ist bei solchen Werten von a, für die $a < \frac{1}{4}n$, sicher erfüllt, weil dann $\frac{n^2}{4a}$ die Grenze n von c übersteigt; ist dagegen $a \geqq \frac{1}{4}n$, bleibt also $\frac{n^2}{4a}$ unter n, so ist $\frac{2\sqrt{ac}}{n}$ nur bis zu dem Werte $c = \frac{n^2}{4a}$ ein echter Bruch, darüber hinaus ein unechter Bruch.

Demnach ist, wenn zuerst die Integration in Bezug auf die Variable c ausgeführt wird, für $a \leq \frac{1}{4}n$:

$$\frac{1}{n}\int_0^n \frac{2\sqrt{ac}}{n}\,pc = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{2\sqrt{ac}}{n}\,dc = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{a}{n}};$$

dagegen für $a \geq \frac{1}{4}n$:

$$\frac{1}{n}\int_0^n \frac{2\sqrt{ac}}{n}\,pc = \frac{1}{n}\left\{\int_0^{\frac{n^2}{4a}} \frac{2\sqrt{ac}}{n}\,dc + \int_{\frac{n^2}{4a}}^n 1\,.\,dc\right\} = 1 - \frac{n}{12a};$$

daraus folgt schliesslich:

$$4)\quad \begin{cases} q = \frac{1}{n}\left\{\int_0^{\frac{1}{4}n} \frac{4}{3}\sqrt{\frac{a}{n}}\,pa + \int_{\frac{1}{4}n}^n \left(1 - \frac{n}{12a}\right)pa\right\} \\ = \frac{1}{n}\left\{\int_0^{\frac{1}{4}n} \frac{4}{3}\sqrt{\frac{a}{n}}\,da + \int_{\frac{1}{4}n}^n \left(1 - \frac{n}{12a}\right)da\right\} \\ = \frac{31}{36} - \frac{1}{6}l\,.\,2. \end{cases}$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung 1) ein, so erhält man als Wahrscheinlichkeit imaginärer Wurzeln

$$5)\qquad Q = \frac{31}{72} - \frac{1}{12}l\,.\,2$$

und daraus die Wahrscheinlichkeit reeller Wurzeln

$$6)\qquad P = \frac{41}{72} + \frac{1}{12}l\,.\,2,$$

beide unabhängig von n, daher auch für einen unendlich grossen Wert dieser Grenze giltig.*

27. **Problem XIX.** *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die kubische Gleichung* $z^3 + pz + q = 0$, *deren*

* Eine andere Lösung dieses von J. J. Sylvester aufgestellten Problems von ihm selbst s. Educ. Tim, Bd. XIX, pag. 25.

Koeffizienten beliebige Werte zwischen den respektiven Grenzen $\pm$ P, $\pm$ Q *haben können, nur reelle Wurzeln liefert?*

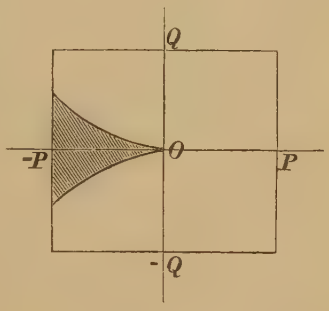
Lösung. Sieht man wieder p, q als Koordinaten x, y eines Punktes der Ebene an, so wird das Gebiet der möglichen Fälle in geometrischer Darstellung durch ein Rechteck begrenzt, dessen Ecken die Koordinaten $\pm P$, $\pm Q$ haben, dessen Inhalt also $4PQ$ ist.

Sollen die Wurzeln der Gleichung sämtlich reell sein, so müssen die Koeffizienten der Bedingung $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \leqq 0$ oder

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 \leqq 0$$

genügen; für das untere Zeichen repräsentiert diese Bedingung eine semikubische Parabel, durch welche das oben erwähnte Rechteck der möglichen Fälle in zwei Gebiete, das der günstigen und jenes der ungünstigen geschieden wird.

Fig. 12.



α) Ist $Q^2 > \frac{4}{27} P^3$, so hat die Parabel die in Fig. 12 angedeutete Lage und das (in der Zeichnung schraffierte) Gebiet der günstigen Fälle den Inhalt

$$2\int_0^P \frac{2}{3\sqrt{3}} x^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{8\sqrt{3}}{45} P^{\frac{5}{2}};$$

die diesem Falle entsprechende Wahrscheinlichkeit ist

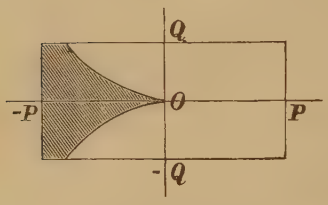
$$1) \qquad \Pi = \frac{2\sqrt{3}}{45} \cdot \frac{P^{\frac{3}{2}}}{Q}.$$

β) Für $Q^2 < \frac{4}{27} P^3$ nimmt die Parabel die in Fig. 13 (S. 42) angedeutete Lage an, das Gebiet der günstigen Fälle hat den Inhalt

$$2PQ - 2\int_0^Q \frac{3}{\sqrt[3]{4}} y^{\frac{2}{3}} dy = 2PQ - \frac{18}{5\sqrt[3]{4}} Q^{\frac{5}{3}}$$

und die Wahrscheinlichkeit reeller Wurzeln ist

Fig. 13.



$$2) \qquad \Pi = \frac{1}{2} - \frac{9(2Q^2)^{\frac{1}{3}}}{20P}.$$

Für den Grenzfall $Q^2 = \frac{4}{27} P^3$ liefern beide Formeln 1), 2) denselben Wert, nämlich $\Pi = \frac{1}{5}$.

Auf den besonderen Fall $P = Q = 1$ ist Formel 1) anzuwenden und ergiebt

$$\Pi = \frac{2\sqrt{3}}{45}.*$$

28. **Problem XX.** *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Wurzeln der kubischen Gleichung* $ax^3 + bx + c = 0$ *reell sind, wenn die Koeffizienten* a, b, c *beliebige reelle Werte haben können.*

Lösung. Aus der allgemeinen Bedingung für die Reellität der Wurzeln

$$\left(\frac{c}{2a}\right)^2 + \left(\frac{b}{3a}\right)^3 \leqq 0$$

folgen die zwei besonderen Bedingungen, 1) dass a und b ungleich bezeichnet sein müssen, 2) dass dem numerischen Werte nach

$$c \leqq \left(\frac{4b^3}{27a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

sein muss. Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Bedingung

---

* Vergl. die Anmerkung zu Nr. 25. Auch bei dem vorliegenden Problem hat Lalanne den Unterschied der Fälle α), β) nicht beachtet und Formel 1) als allgemein giltig hingestellt. Die besonderen Werte von Π für $P = Q = 1$ (für quadratische und kubische Gleichungen) sind von Lalanne schon 1876 in einem Memoire (s Comptes rendus, 1876, pag. 1847 fig.) mitgeteilt worden.

erfüllt ist, ist $\frac{1}{2}$; in Bezug auf die zweite Bedingung heisse sie ω; dann ist die verlangte Wahrscheinlichkeit

1) $$P = \frac{1}{2}\omega.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei besonderen Werten von a und b ein beliebiger Wert von c — vorausgesetzt, dass a, b, c unter einer gemeinsamen Grenze n liegen — die obige Bedingung erfüllt, ist

$$\frac{1}{n}\left(\frac{4b^3}{27a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{da}{n}\,\frac{db}{n},$$

daher

$$\omega = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{pa}{n}\int_0^n \frac{1}{n}\left(\frac{4b^3}{27a}\right)^{\frac{1}{2}} pb.$$

Nun bleibt wieder zu untersuchen, inwieweit die Funktion unter dem Integralzeichen ein echter Bruch bleibt.

Es ist

$$\frac{1}{n}\left(\frac{4b^3}{27a}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq 1,$$

wenn

2) $$b \leqq 3\left(\frac{an^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}};$$

diese letztere Bedingung ist für alle zulässigen Werte von b erfüllt, wenn

$$3\left(\frac{an^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \geqq n \quad \text{oder} \quad a \geqq \frac{4}{27}n,$$

dagegen nur bis zu der durch 2) bezeichneten Grenze, wenn

$$3\left(\frac{an^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \leqq n \quad \text{oder} \quad a \leqq \frac{4}{27}n.$$

Folglich hat man für $a \geqq \frac{4}{27}n$:

$$\frac{1}{n}\int_0^n \frac{1}{n}\left(\frac{4b^3}{27a}\right)^{\frac{1}{2}} pb = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{1}{n}\left(\frac{4b^3}{27a}\right) db = \frac{4}{45}\left(\frac{3n}{a}\right)^{\frac{1}{2}},$$

und für $a \leqq \frac{4}{27}n$:

$$\frac{1}{n}\int_0^n \frac{1}{n}\left(\frac{4b^3}{27a}\right)^{\frac{1}{2}} pb = \frac{1}{n}\int_0^{3\left(\frac{an^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{n}\left(\frac{4b^3}{27a}\right)^{\frac{1}{2}} db + \frac{1}{n}\int_{3\left(\frac{an^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}}^n 1 \,.\, db$$

$$= 1 - \frac{9}{10}\left(\frac{2a}{n}\right)^{\frac{1}{3}};$$

daraus folgt weiter:

$$\omega = \frac{1}{n}\left\{\int_{\frac{4}{27}n}^n \frac{4}{45}\left(\frac{3n}{a}\right)^{\frac{1}{2}} pa + \int_0^{\frac{4}{27}n}\left[1 - \frac{9}{10}\left(\frac{2a}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\right] pa\right\};$$

hier kann in beiden Teilen pa durch da ersetzt werden, weil die integrierte Funktion innerhalb des betreffenden Integrationsintervalls ein positiver echter Bruch bleibt. Nach Ausrechnung der Integrale ist

$$\omega = \frac{8}{45}\sqrt{3} - \frac{1}{27};$$

substituiert man diesen Wert in Gleichung 1), so ergiebt sich endlich

$$P = \frac{4}{45}\sqrt{3} - \frac{1}{54}.$$

Da dieser Ausdruck von der anfangs eingeführten Grenze n der Koeffizienten nicht abhängt, so gilt er auch, wenn diese Grenze unendlich weit hinausrückt.

29. **Problem XXI.** *In der Gleichung* $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ *können die Koeffizienten* a, h, b *beliebige reelle Werte annehmen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der durch diese Gleichung dargestellte Kegelschnitt eine Ellipse, imaginär oder eine Hyperbel, insbesondere eine solche, die beide Koordinatenaxen in reellen Punkten schneidet, oder nur eine oder keine dieser Axen?*

Lösung. Die Art des Kegelschnitts hängt von den Vorzeichen von a und b und dem numerischen Werte der Determinante $\Delta = ab - h^2$ ab.

1) Der Kegelschnitt ist eine Ellipse, wenn a und b positiv und Δ positiv ist; daher die bezügliche Wahrscheinlichkeit

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^n \int_0^n \int_0^{\sqrt{ab}} \frac{da}{n} \cdot \frac{db}{n} \cdot \frac{dh}{n} = \frac{1}{9}.$$

2) Der Kegelschnitt ist imaginär, wenn a und b negativ und Δ positiv ist; die bezügliche Wahrscheinlichkeit ist also dieselbe wie vorhin,

$$p_2 = \frac{1}{9}.$$

3) Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel, die beide Koordinatenaxen in reellen Punkten schneidet, wenn a und b positiv und Δ negativ ist. Folglich ist

$$p_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^n \int_0^n \int_{\sqrt{ab}}^n \frac{da}{n} \cdot \frac{db}{n} \cdot \frac{dh}{n} = \frac{5}{36}.$$

4) Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel und schneidet keine der Koordinatenaxen, wenn $a < 0$, $b < 0$, $\Delta < 0$ ist; daher

$$p_4 = \frac{5}{36}.$$

5) Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel und schneidet nur eine der beiden Axen, wenn a, b ungleich bezeichnet sind; demnach ist

$$p_5 = \frac{1}{2}.$$

6) Endlich ist die Wahrscheinlichkeit, dass der durch die vorgelegte Gleichung dargestellte Kegelschnitt eine Hyperbel überhaupt sei,

$$p_6 = p_3 + p_4 + p_5 = \frac{7}{9}.$$

30. **Problem XXII.** *Zwei Personen* A, B *kommen überein, an einem gewissen Tage an einem bestimmten Orte zusammenzutreffen, verabreden aber die Zeit nicht näher, als dass sie zwischen 2 und 3 Uhr liegen soll; jeder verspricht, falls er früher kommt, auf den anderen zehn Minuten zu warten. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Personen sich treffen werden?*

Lösung. Um eine allgemeine Lösung zu erhalten, betrachte man den Zeitraum, innerhalb dessen die Begegnung

erfolgen soll, als Zeiteinheit. Vom Beginn dieses Zeitraumes gezählt sei x die Zeit, nach welcher A, y die Zeit, nach welcher B am bezeichneten Orte eintrifft, dann können x und y alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen. Sieht man sie daher als Koordinaten eines Punktes der Ebene an, so wird das Gebiet der möglichen Fälle durch ein Quadrat begrenzt, dessen Seite und Inhalt 1 ist.

Im weiteren sind zwei Fälle zu unterscheiden.

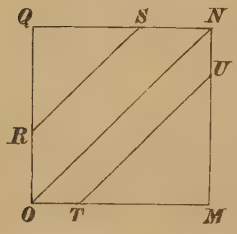
1. A kommt früher und wartet durch das Zeitintervall a; die Begegnung erfolgt, wenn

1) $$x < y < x + a.$$

2. B kommt früher und wartet durch die Zeit b; die Begegnung erfolgt, wenn

2) $$y < x < y + b.$$

Fig. 14.



Um jenes Gebiet zu begrenzen, dessen Punkte einer der Bedingungen 1) und 2) entsprechen, konstruiere man (Fig. 14) $OR = a$, $OT = b$, RS und TU parallel ON. Die Punkte innerhalb des Sechsecks $OTUNSR$ erfüllen 1) oder 2), die Punkte ausserhalb des Sechsecks befriedigen keine dieser Bedingungen. Es ist daher die Wahrscheinlichkeit einer Begegnung*

$$p = 1 - \frac{1}{2}(1-a)^2 - \frac{1}{2}(1-b)^2 = a + b - \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

In Anwendung auf den besonderen Fall der Aufgabe ist $a = b = \frac{1}{6}$ zu setzen und man erhält als Wahrscheinlichkeit der Begegnung

---

* H. Laurent giebt in seinem „Traité du calcul des probabilités“ (Paris 1873) pag. 67 eine analytische Lösung dieser Aufgabe, die jedoch verfehlt ist und auf ein Resultat von logarithmischer Form führt. Indem Laurent den ganzen Zeitraum mit T, den des Wartens mit τ bezeichnet, stellt er für die Wahrscheinlichkeit, dass B mit dem früher (zur Zeit t, vom Anfangspunkte der Zeit T gerechnet) angekommenen A zusammentrifft, den Ausdruck auf $\frac{dt}{T} \cdot \frac{\tau}{T-t}$; während derselbe lauten sollte: $\frac{dt}{T} \cdot \frac{T-t}{T} \cdot \frac{\tau}{T-t} = \frac{dt}{T} \cdot \frac{\tau}{T}$.

$$p = \frac{11}{36},$$

als Wahrscheinlichkeit des Verfehlens

$$q = \frac{25}{36}.$$

31. **Problem XXIII.** *Ein roher Diamant vom Gewichte* a *wird willkürlich in zwei, drei Stücke geteilt. Vorausgesetzt, dass der Wert proportional dem Quadrate des Gewichtes zunimmt, ist der mathematische Wert der zwei, beziehungsweise drei Bruchstücke zu ermitteln.*

Lösung. 1. Die Wahrscheinlichkeit, dass das eine Stück das Gewicht x, das andere also das Gewicht $a - x$ haben wird, ist $\frac{dx}{a}$; und bezeichnet k den Wert der Gewichtseinheit, so ist der mutmassliche Wert der beiden Stücke

$$k\int_0^a [x^2 + (a-x)^2]\frac{dx}{a} = \frac{2}{3}ka^2,$$

so dass der zu befürchtende Wertverlust $\frac{1}{3}$ des ursprünglichen Wertes ausmacht. Es entspricht dies einer wirklichen Teilung in etwa $\frac{4}{5}$ und $\frac{1}{5}$.

2. Im zweiten Falle stellt sich die geometrische Lösung anschaulicher und einfacher als die analytische. Die Gleichung

1) $$x + y + z = a$$

auf ein rechtwinkliges Raumkoordinatensystem bezogen kommt einem Dreieck zu, das auf den drei Koordinatenaxen die Strecke a abschneidet. Bezeichnet man die Fläche dieses Dreiecks mit F_1, das an den Punkt x, y, z anstossende Element desselben mit dF, so ist

$$k\int (x^2 + y^2 + z^2)\frac{dF}{F_1}$$

der Ausdruck für den mathematischen Wert der drei Bruchstücke; das Integral ist über die ganze Dreiecksfläche auszudehnen. Nennt man r den Abstand des Punktes x, y, z vom Fusspunkte des aus dem Ursprunge auf die Ebene des

Dreiecks gefällten Lotes $\left(= \frac{1}{3} a \sqrt{3}\right)$, so ist $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + \frac{a^2}{3}$, der obige Ausdruck heisst dann

$$k \int \left(r^2 + \frac{a^2}{3}\right) \frac{dF}{F_1} = k \int r^2 \frac{dF}{F_1} + k \frac{a^2}{3}.$$

Das Integral im ersten Gliede rechts drückt das Quadrat des Trägheitshalbmessers des gleichseitigen Dreiecks 1) in Bezug auf eine durch dessen Schwerpunkt gehende zu seiner Ebene normal gerichtete Axe aus; da $a \sqrt{2}$ die Seite dieses Dreiecks ist, so ist:

$$\int r^2 \frac{dF}{F_1} = \frac{a^2}{6};$$

der mutmassliche Wert der drei Bruchstücke kommt also gleich:

$$\frac{1}{2} k a^2,$$

der mathematische Wertverlust macht demnach die Hälfte des ursprünglichen Wertes aus. Es entspricht dies einer wirklichen Teilung in beiläufig $\frac{13}{20}$, $\frac{5}{20}$ und $\frac{2}{20}$.

32. Die Wahrscheinlichkeitskurve. Bei den bisherigen Aufgaben über Wahrscheinlichkeiten, die von einer stetig veränderlichen Grösse abhängen, wurden alle Werte dieser Grösse zwischen den gegebenen Grenzen als gleich wahrscheinlich vorausgesetzt; demzufolge war die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig angenommener Wert der Variabeln in ein bezeichnetes, unendlich kleines oder endliches Intervall fallen werde, von der Lage dieses Intervalls gegen die Grenzen der Variabeln unabhängig und nur durch dessen Grösse bedingt.

Es giebt aber Fälle, wo nicht alle Werte der Variabeln a priori gleich wahrscheinlich sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig gewählter Wert einem bestimmten unendlich kleinen Intervall $x \ldots x + dx$ angehört, hängt dann nicht allein von der Ausdehnung dx dieses Intervalls, sondern auch von seiner Lage ab, welche durch den Anfangswert x charakterisiert ist; sie lässt sich analytisch in der Form

1) $$p = \varphi(x)\,dx$$

darstellen.

Die Kurve, deren Gleichung

2) $$y = k\varphi(x)$$

ist — k bedeutet eine Konstante — giebt ein anschauliches Bild von dem Verlaufe dieser Wahrscheinlichkeit und wird aus diesem Grunde als Wahrscheinlichkeitskurve bezeichnet; sie lässt sich bei Lösung einschlägiger Aufgaben häufig mit Vorteil anwenden.

Denkt man sich eine grosse Anzahl von Werten von x willkürlich angenommen und im Sinne dieser geometrischen Darstellung als Abscissen aufgetragen, so wird man zu einer ungleichförmigen Punktreihe in der Abscissenaxe geführt, welche ungleichförmig bleibt, auch wenn die Anzahl der Werte von x oder der Punkte ins Unendliche wächst. Die Menge oder Dichte der Punkte in einem bezeichneten Elemente dx, oder die Wahrscheinlichkeit, dass ein weiterer beliebig angenommener Wert von x in dieses Element fallen werde, ist dem über diesem Elemente stehenden Flächenelemente der Kurve 2), oder, wenn dx als konstant angesehen wird, der dem Anfangswerte des Elements entsprechenden Ordinate der Wahrscheinlichkeitskurve proportional.

In einigen Fällen führt die Abscisse, deren zugehörige Ordinate die ganze Fläche der Kurve 2) halbiert, den Namen des wahrscheinlichen Wertes von x.

33. **Beispiel I.** *Zwei Grössen* A, B *sind gemessen worden; jede dieser Messungen ist mit einem Fehler behaftet, und alle Werte dieses Fehlers, der an die Grenzen* $\pm$ a *gebunden ist, werden als gleich wahrscheinlich vorausgesetzt. Zu finden ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler der Summe* A + B *zwischen gegebenen Grenzen liegt, und der wahrscheinliche Wert dieses Fehlers.*

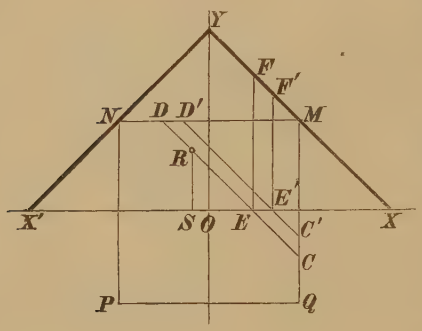
Lösung. Bezeichnet x den Fehler der Messung von A, y den Fehler von B, und betrachtet man x, y als Koordinaten eines Punktes der Ebene, so wird das Gebiet der möglichen Wertverbindungen von x und y durch ein Quadrat $MNPQ$ (Fig. 15, S. 50) von der Seitenlänge $2a$ versinnlicht.

Fasst man die Wertverbindung x, y ins Auge, welche zu dem Punkte R führt, so ist der ihr entsprechende Fehler in der Summe $A + B$

$$\varepsilon = x + y = OE;$$

aber alle Wertverbindungen x, y, welche Punkten der unter 45^0 geneigten Transversale CD des Quadrates angehören, ergeben denselben Betrag $\varepsilon = OE$ des Summenfehlers.

Fig. 15.



Macht man $EE' = d\varepsilon$, zieht $C'D'$ durch E' parallel CD, so entsprechen allen Punkten des Trapezes $CDD'C'$ Fehler zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in diesem Intervall ist mithin dem Inhalte dieses Trapezes und dieser wieder — bei konstantem $d\varepsilon$ — der Projektion von CD auf XX' oder YY', d. i. der Länge CM proportional. Macht man also die Ordinate $EF = CM$, so geben die Punkte F die Wahrscheinlichkeitskurve der Fehlersumme ε; sie besteht aus zwei Geraden XY, $X'Y$, welche gegen die Abscissenaxe gleich geneigt sind.

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen den Grenzen $\varepsilon = OE$ und $\varepsilon + d\varepsilon = OE'$ ist

$$p = \frac{EE'F'F}{XX'Y} = \frac{EF \,.\, d\varepsilon}{4a^2} = \frac{2a - \varepsilon}{4a^2} d\varepsilon,$$

die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen 0 und $\varepsilon = OE$

$$P = \frac{OEFY}{XX'Y} = \frac{(4a - \varepsilon)\varepsilon}{8a^2},$$

die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen den Grenzen $\pm \varepsilon$

$$P' = 2P = \frac{(4a - \varepsilon)\varepsilon}{4a^2}.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{(4a-\varepsilon)\varepsilon}{4a^2} = \frac{1}{2}$$

folgt der numerische Betrag des wahrscheinlichen Fehlers in $A+B$ gleich

$$a(2-\sqrt{2}).$$

Anmerkung. Die oben gemachte Annahme, dass alle Werte des Fehlers einer Messung gleich wahrscheinlich sind, trifft in Wirklichkeit nicht oder in den seltensten Fällen näherungsweise zu. Nach der von Gauss begründeten Fehlertheorie ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Messung zwischen den Grenzen x und $x+dx$ liege,

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} . dx.$$

Die entsprechende Wahrscheinlichkeitskurve

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$$

ist eine transscendente Linie, bestehend aus zwei symmetrischen, der Abscissenaxe asymptotisch sich nähernden Ästen mit je einem Wendepunkte.

34. **Beispiel II.** *In der Strecke* AB = 1 *wird ein Punkt* Y *und sodann in der Strecke* AY *ein zweiter Punkt* X *willkürlich angenommen. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die Länge* AX *innerhalb gegebener Grenzen liegt, und den wahrscheinlichen Wert von* AX *zu ermitteln.*

Lösung. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Punkte Y, X bestimmte Abstände y, x von A besitzen, ist $\frac{dy}{1} \cdot \frac{dx}{y} = \frac{dx\,dy}{y}$; daher die vollständige Wahrscheinlichkeit, dass bei beliebigem Werte von y der Punkt X in das Intervall $x \ldots x+dx$ fallen wird,

$$p = dx \int_x^1 \frac{dy}{y} = -l\,.\,x\,.\,dx.$$

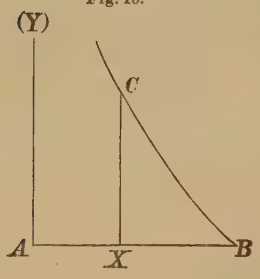
Dieselbe ist von x abhängig und die entsprechende Wahrscheinlichkeitskurve eine logarithmische Linie, welche der Ordinatenaxe asymptotisch sich nähert.

Die Fläche $AXC(Y)$ (Fig. 16), welche über der Abscisse $AX = x$ steht, hat den Inhalt

$$xl \cdot \frac{e}{x},$$

die ganze Fläche $AB(Y)$ den Inhalt 1. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, dass AX zwischen gegebenen Grenzen x_1, x_2 enthalten ist,

Fig. 16.



$$P = x_2 l \cdot \frac{e}{x_2} - x_1 l \cdot \frac{e}{x_1} = l \cdot \frac{\left(\frac{e}{x_2}\right)^{x_2}}{\left(\frac{e}{x_1}\right)^{x_1}}.$$

Der wahrscheinliche Wert von x ergiebt sich aus der Gleichung

$$xl \cdot \frac{e}{x} = \frac{1}{2}$$

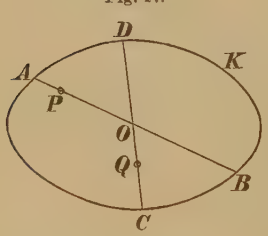
und beträgt etwas weniger als $\frac{1}{5}$ von AB.

2. Punkte in Flächen.

35. **Problem I.** *In einer ebenen Figur, deren Begrenzung durch eine centralsymmetrische Kurve* K *gebildet wird, werden drei Punkte* P, Q, R *willkürlich angenommen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Dreieck* PQR *den Mittelpunkt von* K *einschliesst?*

Lösung. P, Q (Fig. 17) seien die beiden zuerst gewählten Punkte. Führt man durch sie die Durchmesser AB, CD, so wird das Dreieck PQR dann und nur dann den Mittelpunkt O einschliessen, wenn der dritte Punkt R in den Sektor $BODK$ fällt, d. h. wenn er sowohl durch den Durchmesser AB von Q als auch durch den Durchmesser CD von P getrennt wird; da nun jedes dieser einfachen Ereignisse die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ hat, so ist die zusammengesetzte Wahr-

Fig. 17.



scheinlichkeit für ihr Zusammentreffen oder für das fragliche Ereignis $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.*

36. **Problem II.** *In der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks wird ein Punkt beliebig angenommen, von demselben werden Senkrechte zu den Seiten geführt. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass aus diesen drei Perpendikeln ein spitzwinkliges Dreieck sich bilden lässt.*

Lösung. Die Summe der in der Aufgabe angeführten drei Perpendikel kommt der Höhe des Dreiecks gleich: der willkürlichen Annahme des Punktes in dem Dreiecke entspricht also die willkürliche Teilung der Höhe in drei Teile, und die Wahrscheinlichkeit, dass aus diesen Teilen ein spitzwinkliges Dreieck möglich ist, wurde in Problem X, Nr. 16 gefunden gleich

$$p = 3l \,.\, 2 - 2.$$

37. **Problem III.** *Eine kreisförmige Scheibe von der Fläche* A *wurde durch einen Schuss getroffen; die Wahrscheinlichkeit, dass dies innerhalb eines beliebig begrenzten Teiles vom Inhalte* a *geschehen ist, ist* $\mathrm{p} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{A}}$. *Welchen Wert nimmt diese Wahrscheinlichkeit an, wenn von einem andern gegen die Scheibe abgefeuerten Schusse bekannt ist, dass er die Scheibe in grösserer, beziehungsweise geringerer Entfernung vom Mittelpunkte getroffen hat als der eben betrachtete?*

Lösung. 1. Man denke sich den Teil a der Scheibe durch konzentrische aus dem Mittelpunkte beschriebene Kreisbögen in elementare Streifen zerlegt — die äussersten Halbmesser dieser Bögen seien r_1, r_2; der Inhalt des Elementes, welchem die Radien x und $x + dx$ zukommen, lässt sich dann in der Form $f(x)\,dx$ darstellen, so dass

$$a = \int_{r_1}^{r_2} f(x)\,dx$$

ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schuss die Scheibe innerhalb des erwähnten Elementes trifft, ist $\frac{f(x)\,dx}{\pi r^2}$, wenn

* Vergl. die umständliche Lösung C. Jordan's im I. Bd. des Bull. de la Soc. Mathém. de France, pag. 256 sq.

r den Halbmesser der ganzen Scheibe bedeutet; die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schuss sie in einer Entfernung vom Centrum grösser als x erreicht, ist $\frac{\pi(r^2 - x^2)}{\pi r^2}$; daraus folgt die Wahrscheinlichkeit, dass der bessere Schuss (er sei der erste oder zweite) die Scheibe innerhalb des Teiles a trifft,

$$p_1 = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{f(x)\,dx}{\pi r^2} \cdot \frac{\pi(r^2 - x^2)}{\pi r^2}$$

$$= \frac{r^2 \int_{r_1}^{r_2} f(x)\,dx - \int_{r_1}^{r_2} x^2 f(x)\,dx}{\frac{1}{2}\pi r^4};$$

das erste Integral des Zählers giebt den Inhalt a, das zweite das Trägheitsmoment m dieses Teils der Scheibe, während der Nenner dem Trägheitsmoment M der ganzen Scheibenfläche gleichkommt, beide Momente auf eine zur Scheibenfläche normale durch ihren Mittelpunkt gehende Axe bezogen. Demnach ist:

1) $$p_1 = 2\frac{a}{A} - \frac{m}{M}.$$

Dies ist aber auch die Wahrscheinlichkeit für den ersten in Frage stehenden Fall: denn dort soll der bessere Schuss den Scheibenteil a treffen.

2. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schuss das oben bezeichnete Element von a trifft, ist $\frac{f(x)\,dx}{\pi r^2}$; die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schuss sie in einer Entfernung vom Centrum trifft, die kleiner ist als x, ist $\frac{\pi x^2}{\pi r^2}$; daher die Wahrscheinlichkeit, dass der schlechtere Schuss (gleichgiltig ob er der erste oder zweite) den Teil a trifft,

2) $$p_2 = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{f(x)\,dx}{\pi r^2} \cdot \frac{\pi x^2}{\pi r^2} = \frac{\int_{r_1}^{r_2} x^2 f(x)\,dx}{\frac{1}{2}\pi r^4} = \frac{m}{M}.$$

Dies ist zugleich die Wahrscheinlichkeit des zweiten Falles der Aufgabe: denn dort handelt es sich darum, dass der schlechtere Schuss den Teil a der Scheibe treffen soll.

Anmerkung. Es ist $p_1 + p_2 = 2\frac{a}{A} = 2p$, wie es sein muss, da die linksseitige Summe die Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass von zwei Schüssen einer — der bessere oder schlechtere — den Teil a der Scheibe trifft.

Sind die Trägheitshalbmesser von A und a in Bezug auf die besprochene Axe gleich gross, d. h.

$$M = A \,.\, k^2, \quad m = a \,.\, k^2,$$

so findet die interessante Beziehung statt

$$p_1 = p_2 = \frac{a}{A} = p.$$

38. **Problem IV.** *In der Fläche eines gegebenen Kreises werden zwei Punkte* P, Q *willkürlich angenommen. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass der aus* P *als Mittelpunkt mit dem Halbmesser* PQ *beschriebene Kreis innerhalb des gegebenen Kreises liegen wird.*

Lösung. Wählt man den Halbmesser des gegebenen Kreises als Einheit, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass Punkt P in der Entfernung x vom Mittelpunkte, d. i. in dem Kreisringe mit den Radien x und $x + dx$ liegt, $\frac{2\pi x \,.\, dx}{\pi} = 2x \,.\, dx$; fällt Q bei dieser Lage von P in die Fläche eines aus P mit dem Halbmesser $1 - x$ beschriebenen Kreises, so ist den Bedingungen der Aufgabe entsprochen; die Wahrscheinlichkeit für dieses zweite einfache Ereignis ist $\frac{\pi(1-x)^2}{\pi} = (1-x)^2$.

Daraus ergiebt sich die vollständige zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses

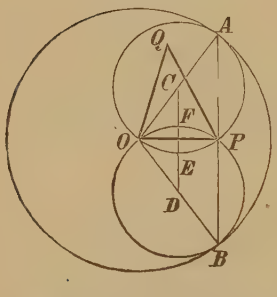
$$p = \int_0^1 2x(1-x)^2\,dx = \frac{1}{6}.$$

39. **Problem V.** *Zwei innerhalb eines gegebenen Kreises beliebig angenommene Punkte* P, Q *werden mit dem Mittelpunkte* O *zu einem Dreieck verbunden. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass der diesem Dreieck umgeschriebene Kreis innerhalb des gegebenen Kreises enthalten ist.*

Lösung. Der Punkt P komme in die Entfernung $OP = x$ (Fig. 18) vom Mittelpunkte zu liegen; die Wahrscheinlichkeit, dass dem so ist, beträgt $\frac{2\pi x\,dx}{\pi} = 2x\,dx$, wenn, wie vorhin, der Halbmesser des gegebenen Kreises als Einheit gilt. Es bleiben nun die günstigen Lagen von Q für diese Lage von P zu untersuchen.

Zu diesem Zwecke führe man durch P die zu OP rechtwinklige Sehne AB und beschreibe über den Radien OA, OB als Durchmessern Kreise; C, D seien ihre Mittelpunkte, die Centrale CD schneide ihre Umfänge in den Punkten E, F. Man erkennt nun sogleich, dass den Bedingungen der Aufgabe entsprochen sein wird, wenn der Punkt Q in eine der Flächen $PFOAP$ oder $PEOBP$ zu liegen kommt. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der angenommenen Lage von P der Punkt Q eine günstige Lage annimmt, ist also ausgedrückt durch

Fig. 18.



$$\frac{ar.PFOAP + ar.PEOBP}{\pi}.$$

Setzt man Winkel $OAP = \theta$, so kommt die im Zähler befindliche Summe als doppelte Fläche des Kreises C, vermindert um die doppelte Fläche von $OEPF$, gleich

$$\tfrac{1}{2}\pi - \theta + \sin\theta\cos\theta.$$

Die vollständige zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit des in Rede stehenden Ereignisses ist demnach

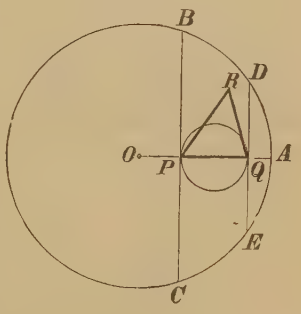
$$p = \int_0^1 2x\,dx \cdot \frac{\frac{1}{2}\pi - \theta + \sin\theta\,\cos\theta}{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2\theta + 2\sin\theta\,\cos\theta)\sin\theta\,\cos\theta\,d\theta = \frac{3}{8}.*$$

40. **Problem VI.** *In einem beliebigen Halbmesser eines gegebenen Kreises werden zwei Punkte willkürlich angenommen und ein dritter in der Fläche des Kreises; die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die drei Punkte Ecken eines spitzwinkligen Dreiecks sind.*

Lösung. Die erstgenannten zwei Punkte seien P, Q (Fig. 19) in dem beliebig gezogenen Halbmesser OA, welcher als Längeneinheit dienen soll; setzt man $OP = x$, $OQ = y$, so ist $dx\,dy$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Punkte P, Q die angenommene Lage besitzen.

Fig. 19.



Um die zugehörigen günstigen Lagen des dritten Punktes R zu erhalten, führe man durch P, Q Sehnen BC, DE rechtwinklig zu OA und beschreibe über PQ als Durchmesser einen Kreis. So oft nun R zwischen die Sehnen, jedoch ausserhalb dieses Kreises fällt, ist den Bedingungen der Aufgabe entsprochen. Die Wahrscheinlichkeit also, dass bei der angegebenen Lage von P, Q eine günstige Lage von R eintreten werde, ist

---

* In dieser Form wurde das Problem von Professor Seitz aufgestellt und gelöst in den Educ. Tim., Bd. XXXII, pag. 106. Das von Watson in den Educ. Tim., Bd. XXVI, pag. 77 vorgelegte Problem ist mit dem vorliegenden identisch, die dort mitgeteilte Lösung C. Leudesdorf's, welche das Resultat $\frac{\pi^2}{16}$ ergeben hat, ist unrichtig, weil sie nicht einer gleichförmigen Verteilung der Punkte über die Kreisfläche entspricht.

$$\frac{1}{\pi}\left\{\left[\arccos x - x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[\arccos y - y(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{1}{4}\pi(y-x)^2\right\}.$$

Die vollständige zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit des obigen Ereignisses ist demnach mit Rücksicht darauf, dass P und Q vertauscht werden können:

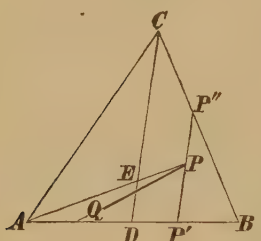
$$p = \frac{2}{\pi}\int_0^1\int_x^1 \left\{\left[\arccos x - x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[\arccos y - y(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{1}{4}\pi(y-x)^2\right\} dx\,dy$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \left\{\arccos x - x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + x\arccos x - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}\pi(1-x)^3\right\} dx$$

$$= \frac{1}{3\pi} - \frac{1}{6}.$$

41. **Problem VII.** *Der Mittelpunkt der Basis eines Dreiecks wird mit der Gegenecke verbunden; in jedem der beiden Teildreiecke wird ein Punkt beliebig angenommen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Verbindungslinie der beiden Punkte die Grundlinie des Dreiecks schneidet?*

Fig. 20.



Lösung. Es sei P der in dem Dreiecke BCD (Fig. 20) angenommene Punkt; bezeichnet man seine schiefwinkligen Koordinaten DP', $P'P$ mit x, y, setzt $AB = 2a$, $CD = b$, so ist die Wahrscheinlichkeit der bezeichneten Lage von P durch den Bruch $\frac{dx\,dy}{\frac{1}{2}ab}$ gegeben. Um die zu P gehörigen günstigen Lagen des zweiten Punktes Q zu ermitteln, verbinde man P mit A: Nur wenn Q in das Dreieck ADE fällt, wird die Gerade PQ die Basis und zwar die Hälfte AD derselben schneiden. Demnach kommt die Wahrscheinlichkeit einer günstigen Lage von Q gleich

$$\frac{\Delta ADE}{\Delta ADC} = \frac{DE}{DC} = \frac{a}{b}\cdot\frac{y}{a+x}$$

und die vollständige Wahrscheinlichkeit des im Texte angeführten Ereignisses für alle Lagen des Punktes P im Dreiecke BCD:

$$\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}(a-x)} \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{a+x} \cdot \frac{dx\,dy}{\frac{1}{2}ab} = 4l \,.\, 2 - \frac{5}{2}.$$

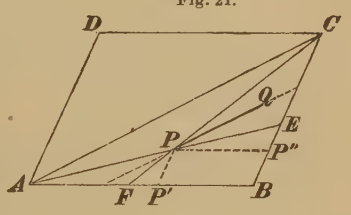
Dieselbe Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, wenn man dem Punkte Q alle Lagen im Dreiecke ACD erteilt, so dass der endgiltige Wert der gesuchten Wahrscheinlichkeit gleichkommt

$$p = 8l \,.\, 2 - 5.$$

42. **Problem VIII.** *In der Fläche eines gegebenen Parallelogramms werden zwei Punkte willkürlich angenommen; es ist die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass ihre Verbindungslinie Gegenseiten des Parallelogramms schneidet.*

Lösung. Es sei P (Fig. 21) einer der beiden Punkte; man setze $AB = a$, $BC = b$, Winkel $ABC = \alpha$ und die schiefwinkligen Koordinaten von P, $AP' = x = a\xi$, $P'P = y = b\eta$, so ist die Wahrscheinlichkeit der bezeichneten Lage von P ausgedrückt durch $\frac{dx\,dy\sin\alpha}{ABCD}$. Wir betrachten jene Lagen von Q, für welche die Linie PQ die benachbarten Seiten AB, BC schneidet, und ziehen zu diesem Ende die Linien AC, APE, CPF; ein günstiger Fall tritt ein, wenn Q in eines der Dreiecke AFP, CEP fällt, und die Wahrscheinlichkeit hierfür ist:

Fig. 21.



$$\frac{\Delta AFP + \Delta CEP}{ABCD};$$

demnach lautet die vollständige Wahrscheinlichkeit dafür, dass die benachbarten Seiten AB, BC von PQ getroffen werden,

$$1) \quad q = \frac{1}{(ABCD)^2} \int\int (\Delta AFP + \Delta CEP)\,dx\,dy\sin\alpha,$$

das Integral über die Fläche des Dreiecks ABC ausgedehnt.

Drückt man die Flächen der Dreiecke in den Grössen a, b, ξ, η aus und führt man die entsprechenden Grenzen ein, so wird

$$\int\int (\Delta AFP + \Delta CEP)\, dx\, dy \sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2} a^2 b^2 \sin^2\alpha \int_0^1 \int_0^{\xi} \left[\frac{\xi - \eta}{1 - \eta}\, \eta + \frac{\xi - \eta}{\xi} (1 - \xi) \right] d\xi\, d\eta,$$

oder zweckmässiger, wenn man im ersten Teile die Reihenfolge der Integrationen verändert, weiter gleich:

$$\frac{1}{2} a^2 b^2 \sin^2\alpha \left\{ \int_0^1 d\eta \int_{\eta}^1 \frac{\xi - \eta}{1 - \eta}\, \eta\, d\xi + \int_0^1 d\xi \int_0^{\xi} \frac{\xi - \eta}{\xi} (1 - \xi)\, d\eta \right\}$$

$$= \frac{1}{12} a^2 b^2 \sin^2\alpha.$$

Es ist also, wenn man für $dx\, dy \sin\alpha$ kurz $d(\Delta ABC)$ schreibt,

2) $$\int\int (\Delta AFP + \Delta CEP) \cdot d(\Delta ABC) = \frac{1}{3} (\Delta ABC)^2,$$

die Integration über das Dreieck ABC ausgedehnt.

Führt man den eben gefundenen Wert in die Gleichung 1) ein, so wird

3) $$q = \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta ABC}{ABCD} \right)^2 = \frac{1}{12}.$$

Für die übrigen drei Paare benachbarter Seiten ergiebt sich derselbe Wert, so dass die vollständige Wahrscheinlichkeit, die Gerade PQ werde irgend ein Paar benachbarter Seiten des Parallelogramms schneiden, gleich ist

4) $$Q = 4q = \frac{1}{3},$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass gegenüberliegende Seiten getroffen werden,

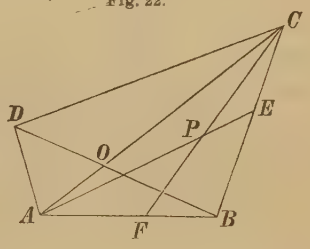
5) $$P = 1 - Q = \frac{2}{3}.$$ *

* Bei diesem und dem vorangegangenen Problem hätte im vorhinein gesagt werden können, dass die geforderte Wahrscheinlichkeit von der Form und den Dimensionen der gegebenen Figur unabhängig

43. **Problem IX.** *In der Fläche eines konvexen Vierecks, dessen Diagonalen sich in den Verhältnissen* $\lambda : (1-\lambda)$ *und* $\mu : (1-\mu)$ *teilen, werden zwei Punkte willkürlich angenommen; die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass ihre Verbindungslinie beide Diagonalen innerhalb des Vierecks schneidet.*

Lösung. $ABCD$ (Fig. 22) sei das gegebene Viereck, $\frac{OA}{AC} = \lambda, \frac{OB}{BD} = \mu, \angle BOC = \alpha$. Wir gehen von einer Lage des einen Punktes P im Dreieck ABC aus und suchen jene Lagen des zweiten Punktes Q auf, für welche die Gerade PQ nur die Diagonale BD innerhalb des Vierecks, und zwar den Abschnitt OB derselben trifft; offenbar geschieht dies dann, wenn Q in eines der Dreiecke AFP, CEP zu liegen kommt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Gerade PQ nur die Strecke OB schneidet, ist also

Fig. 22.



$$q_1 = \int\int \frac{\Delta AFP + \Delta CEP}{ABCD} \cdot \frac{d(\Delta ABC)}{ABCD}$$

$$= \frac{1}{(ABCD)^2} \int\int (\Delta AFP + \Delta CEP)\, d(\Delta ABC),$$

die Integration über die Fläche des Dreiecks ABC ausgedehnt. Mit Benutzung des bei Lösung des vorigen Problems, Nr. 42 Gleichung 2), gefundenen Werts für dieses Integral ist weiter

$$1) \quad q_1 = \frac{1}{3} \frac{(\Delta ABC)^2}{(ABCD)^2} = \frac{1}{3} \frac{AC^2 \cdot OB^2 \cdot \sin^2\alpha}{AC^2 \cdot BD^2 \cdot \sin^2\alpha} = \frac{1}{3} \cdot \frac{OB^2}{BD^2}.$$

---

sein werde. Denn jedes Dreieck lässt sich durch Parallelprojektion aus einem gleichseitigen Dreieck, jedes Parallelogramm aus einem Quadrat ableiten, und die Beziehungen, von welchen in den gedachten Aufgaben gehandelt wird, sind projektivischer Natur; demnach bleibt auch die Wahrscheinlichkeit für beide Figuren dieselbe. Nun ist aber klar, dass sie bei dem gleichseitigen Dreieck, beziehungsweise dem Quadrate von der Seitenlänge nicht abhängen kann. Es wäre daher zulässig gewesen, bei Problem VII von einem gleichschenkligen oder gleichseitigen Dreieck, bei Problem VIII von einem Rechteck oder Quadrat auszugehen.

Ähnlich erhält man für die Wahrscheinlichkeit, dass die Gerade PQ nur die Strecke OD, beziehungsweise OA, OC schneidet, den Wert

2) $$q_2 = \frac{1}{3}\frac{OD^2}{BD^2},$$

3) $$q_3 = \frac{1}{3}\frac{OA^2}{AC^2},$$

4) $$q_4 = \frac{1}{3}\frac{OC^2}{AC^2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit also, dass die Gerade PQ nur eine der beiden Diagonalen innerhalb des Vierecks schneidet, ist

5) $$\left\{\begin{aligned} q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 &= \frac{1}{3}\left\{\frac{OA^2 + OC^2}{AC^2} + \frac{OB^2 + OD^2}{BD^2}\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left\{\lambda^2 + (1-\lambda)^2 + \mu^2 + (1-\mu)^2\right\} \end{aligned}\right.$$

und die geforderte Wahrscheinlichkeit, dass beide Diagonalen geschnitten werden,

6) $$p = 1 - q = \frac{1}{3}\left\{1 + 2(\lambda + \mu) - 2(\lambda^2 + \mu^2)\right\}.$$

Bei einem Parallelogramm ist $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ und die Formeln 5), 6) ergeben die besonderen Werte

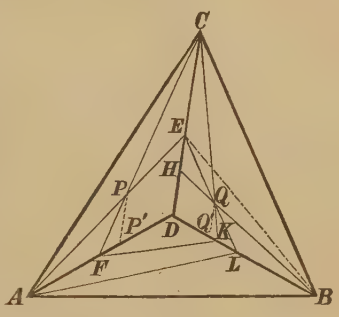
$$q = \frac{1}{3}, \quad p = \frac{2}{3}.$$

44. **Problem X.** *In drei Flächen eines Tetraeders wird je ein Punkt willkürlich angenommen; es ist die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die durch diese drei Punkte gelegte Ebene die vierte Seitenfläche des Tetraeders schneidet, oder dass die Schnittfigur ein Viereck ist.*

Lösung. Fig. 23 (S. 63) stellt das Tetraeder im Grundriss dar. P, Q seien zwei von den drei Punkten, in den Seitenflächen ACD, BCD liegend. Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, jene Lagen des dritten Punktes R in der Fläche ABD zu ermitteln, für welche die durch P, Q, R bestimmte Ebene die Grundfläche ABC nicht schneidet. Zu diesem Behufe legen wir eine Ebene durch C, P, Q, welche das

Tetraeder in dem Dreieck CFK schneidet, denken uns diese um die Gerade PQ (Sehne des Tetraeders) gedreht, bis sie durch A geht, in welcher Grenzlage sie das Tetraeder in dem Dreieck AEL trifft — Voraussetzung ist dabei, dass die Gerade APE die Kante CD weiter von D schneidet als die Gerade BQH. Während dieser Drehung schneidet die Ebene das Tetraeder nach Dreiecken, sonst immer nach Vierecken. Soll daher die Ebene durch P, Q, R die Grundfläche des Tetraeders nicht treffen, so muss der Punkt R in dem Vierecke $AFKL$ angenommen werden. Für die gewählte Lage der Punkte P, Q ergiebt sich also als Wahrscheinlichkeit für das Nichtschneiden von ABC der Ausdruck

Fig. 23.



$$1) \qquad \frac{AFKL}{\Delta ABD} \cdot \frac{d(\Delta ACD)}{\Delta ACD} \cdot \frac{d(\Delta BCD)}{\Delta BCD}.$$

Man setze nun behufs weiterer Ausführung $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$, die schiefwinkligen Koordinaten der Punkte P, Q, und zwar $DP' = ax$, $P'P = cy$; $DQ' = bx'$, $Q'Q = cy'$, ferner für den Augenblick $DE = nc$. Alsdann ist

$$\frac{AFKL}{\Delta ABD} = \frac{DA \,.\, DL - DF \,.\, DK}{DA \,.\, DB},$$

darin

$$DL = DQ' + Q'L = bx' + \frac{y'}{n} DL, \text{ woraus } DL = \frac{bx'}{1 - \frac{y'}{n}};$$

$$DF = DP' + P'F = ax + y \,.\, DF, \text{ woraus } DF = \frac{ax}{1 - y};$$

$$DK = DQ' + Q'K = bx' + y' \,.\, DK, \text{ woraus } DK = \frac{bx'}{1 - y'};$$

mithin hat man weiter

$$2) \qquad \frac{AFKL}{\Delta ABD} = \frac{x'}{1 - \frac{y'}{n}} - \frac{xx'}{(1 - y)(1 - y')};$$

ferner ist

3)
$$\begin{cases} \dfrac{d(\Delta ACD)}{\Delta ACD} = \dfrac{adx \,.\, cdy}{\frac{1}{2}ac} = 2dx\,dy, \\ \dfrac{d(\Delta BCD)}{\Delta BCD} = \dfrac{bdx' \,.\, cdy'}{\frac{1}{2}bc} = 2dx'\,dy'. \end{cases}$$

Durch Einsetzung der Werte aus 2), 3) in 1) und Integration erhält man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter der Voraussetzung $DE > DH$ die Ebene PQR die Grundfläche des Tetraeders nicht schneidet, nämlich

$$q' = 4\int\int\int\int \left\{ \frac{x'}{1-\frac{y'}{n}} - \frac{xx'}{(1-y)(1-y')} \right\} dx\,dy\,dx'\,dy',$$

die zuerst zu vollführende Integration in Bezug auf die Variabeln x', y' auf die Fläche BDE, die dann in Bezug auf die Variabeln x, y vorzunehmende Integration auf die ganze Dreiecksfläche ACD ausgedehnt. Aus den Gleichungen der Geraden BE, AC, welche lauten:

$$x' + \frac{y'}{n} = 1, \quad x + y = 1,$$

ergeben sich die Integrationsgrenzen, und nach Einführung derselben folgt für obige Wahrscheinlichkeit der von a, b, c, daher von der Form des Tetraeders unabhängige Ausdruck

$$q' = 4\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^n \int_0^{1-\frac{y'}{n}} \left\{ \frac{nx'}{n-y'} - \frac{xx'}{(1-y)(1-y')} \right\} dy\,dx\,dy'\,dx'$$

$$= 2\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^n \left\{ 1 - \frac{1-x}{y}y' - \frac{x}{1-y}\,\frac{(1-\frac{1-x}{y}y')^2}{1-y'} \right\} dy\,dx\,dy'$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} \left\{ \frac{y}{1-x} + 2\frac{x(1-x)}{y(1-y)} - \frac{3x}{1-y} + \frac{2x}{1-y}\cdot\frac{(1-x-y)^2}{y^2} l.\frac{1-x-y}{1-x} \right\} dy\,d$$

wenn man im Laufe der Rechnung für n den aus der Beziehung $\frac{DE}{P'P} = \frac{AD}{AP'}$ resultierenden Wert $\frac{y}{1-x}$ einführt.

Die Ausrechnung der drei ersten Glieder bereitet keine Schwierigkeit. Das vierte Glied lautet nach einiger Umformung:

$$2\int_0^1\int_0^{1-y}\frac{1}{y^2}\left\{x(1-y)-2x^2+\frac{x^3}{1-y}\right\}l\cdot\frac{1-x-y}{1-x}\,dy\,dx;$$

löst man $l\cdot\dfrac{1-x-y}{1-x}$ in eine Differenz auf und wendet auf die beiden so entstandenen Integrale partielle Integration an, indem man setzt:

$$l\,.\,(1-x-y),\ \text{beziehungsweise}\ l\,.\,(1-x)=u,$$

$$\left\{x(1-y)-2x^2+\frac{x^3}{1-y}\right\}dx=dv,$$

so wird man auf Integrale algebraischer rationaler Funktionen geführt.

Man erhält schliesslich

4) $$q'=\frac{1}{8}.$$

Dieselbe Wahrscheinlichkeit ergiebt sich für das Nichttreffen der Grundfläche des Tetraeders unter der Voraussetzung $DH>DE$, so dass die vollständige Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gleichkommt

5) $$q=2q'=\frac{1}{4}.$$

Daraus folgt endlich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Grundfläche des Tetraeders geschnitten wird oder dass die Schnittfigur ein Viereck ist, nämlich

6) $$p=1-q=\frac{3}{4}.$$

45. **Die Wahrscheinlichkeitsfläche.** Den bisher behandelten Aufgaben über Punkte, welche in einer Ebene willkürlich angenommen werden, lag die Voraussetzung der gleichförmigen Verteilung der Punkte über die Ebene zu Grunde. Das Gesetz der Verteilung kann aber von dieser einfachsten Form verschieden sein. Es ist dann die Anzahl der Punkte in einem Element der Ebene oder die Wahrscheinlichkeit, ein beliebig gewählter Punkt falle in dasselbe,

nicht mehr von der Grösse allein, sondern auch von der Lage des Elementes abhängig.

Betrachtet man unter Beziehung auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem jenes Element der Ebene, dessen Eckpunkten die Koordinaten (x, y), $(x + dx, y)$, $(x + dx, y + dy)$, $(x, y + dy)$ zukommen, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein willkürlich angenommener Punkt diesem Elemente angehört, ausser von dem Produkte $dx\,dy$, welches die Grösse des Elementes ausdrückt, auch von x und y abhängen und die Form haben

1) $$p = \varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

Wird der Wert

2) $$z = k\varphi(x, y)$$

von dem Punkte (x, y) aus als dritte zu der Ebene der zwei ersten rechtwinklige Ordinate aufgetragen, so erfüllen die Endpunkte dieser Ordinaten eine Fläche, welche den Verlauf der Wahrscheinlichkeit geometrisch versinnlicht und als Wahrscheinlichkeitsfläche bezeichnet werden kann.

Die Wahrscheinlichkeit, ein beliebig gewählter Punkt falle in einen wie immer begrenzten Teil der Ebene, wird durch den Inhalt des über diesem Teile ruhenden geraden, durch die Fläche 2) begrenzten Cylinders gemessen, wenn der ganze zwischen dieser Fläche und der xy-Ebene befindliche Raum als Einheit genommen wird.

Jene der Wahrscheinlichkeitsfläche aufgeschriebene Kurven, für deren Punkte die dritte Ordinate z konstant ist, ergeben in ihren Projektionen auf die xy-Ebene Kurven gleicher Punktdichte oder gleicher Wahrscheinlichkeit; sie sind den Isohypsen der Terrainflächen vergleichbar.

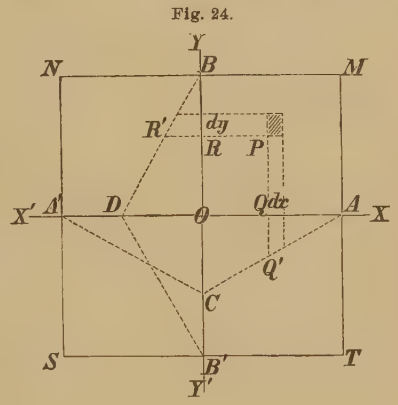
Von den Kurven gleicher Wahrscheinlichkeit kann diejenige, welche die Ebene derart in zwei Teile trennt, dass die über diesen Teilen stehenden Räume gleich gross sind, als wahrscheinliche Kurve gleicher Wahrscheinlichkeit bezeichnet werden.

46. **Beispiel.** *Die rechtwinkligen Koordinaten* ξ, η *eines Punktes in einer Ebene sind gemessen worden; jeder der Messungen kann ein Fehler zwischen den Grenzen* $\pm a$ *anhaften, doch nimmt die Wahrscheinlichkeit eines Fehlerbetrages*

im Verhältnis zu seiner Grösse ab. Es ist die Wahrscheinlichkeit einer Lage des zu bestimmenden Punktes zu ermitteln.

Lösung. Der Mittelpunkt O des Koordinatensystems in Fig. 24 entspreche der wahren (unbekannten) Lage des festzulegenden Punktes. Die punktierte Linie ACA' repräsentiert die Fehlerverteilung in den Abscissen, die ihr kongruente Linie BDB' die Fehlerverteilung in den Ordinaten; dabei ist $OA = OA' = OB = OB' = a$. Möglich sind alle Lagen des Punktes innerhalb des Quadrates $MNST$

Fig. 24.



Wir betrachten jene Lage P des Punktes, welche aus einem Fehler $x = OQ$ in der Abscisse und einem Fehler $y = QP$ in der Ordinate entsprungen ist, oder genauer gesprochen: jene in dem schraffierten Rechteck vom Inhalte $dx\,dy$ befindlichen Lagen, welche aus Fehlern x bis $x + dx$, y bis $y + dy$ in den Koordinaten herrühren. Die Wahrscheinlichkeit einer so beschaffenen Lage des Punktes als die eines zusammengesetzten Ereignisses kommt gleich

$$1)\quad p = \frac{QQ' \,.\, dx}{\Delta\, ACA'} \cdot \frac{RR' \,.\, dy}{\Delta\, BDB'} = \frac{(a-x)(a-y)\,dx\,dy}{a^4}.$$

Die diesem Fall entsprechende Wahrscheinlichkeitsfläche

$$2)\quad z = \frac{(a-x)(a-y)}{a},$$

zunächst für den Quadranten $OAMB$ giltig, ist ein hyperbolisches Paraboloid; die beiden Scharen seiner Erzeugenden sind den Ebenen XOZ, YOZ beziehungsweise parallel. Als Leitlinien der ersten Schar können AM und eine zweite Gerade angesehen werden, welche in der Ebene YOZ liegt, durch B geht und gegen die Axen unter 45^0 geneigt ist; Leitlinien der zweiten Schar sind BM und eine Gerade in der Ebene XOZ, welche durch A geht und unter 45^0 gegen

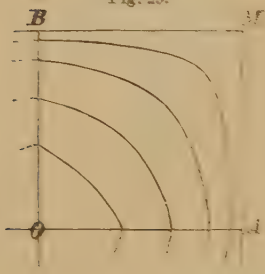
die Axen geneigt ist. Der Symmetrie zufolge gelten für die drei übrigen Quadranten analoge Verhältnisse, so dass die ganze Wahrscheinlichkeitsfläche aus vier hyperbolischen Paraboloiden besteht, welche sich in den Ebenen xz und yz nach geraden Linien durchschneiden.

Die Kurven gleicher Wahrscheinlichkeit haben die allgemeine Gleichung

$$3) \qquad (a-x)(a-y) = c^2,$$

sind also gleichseitige Hyperbeln mit den Asymptoten MA, MB im ersten, NB, NA' im zweiten Quadranten u. s. w. (Fig. 25).

Fig. 25.



Anmerkung. Befolgen die Fehler in den Abscissen und Ordinaten das Gauss'sche Gesetz, ist also die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers x bis $x+dx$ in der Abscisse ausgedrückt durch

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx,$$

die eines Fehlers y bis $y+dy$ in der Ordinate durch

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2y^2} dy,$$

dann ist die Wahrscheinlichkeit eines Punktes in dem elementaren Rechteck $(x, y), (x+dx, y), (x+dx, y+dy), (x, y+dy)$

$$p = \frac{hh'}{\pi} e^{-(h^2x^2+h'^2y^2)} dx\,dy$$

und die entsprechende Wahrscheinlichkeitsfläche

$$z = e^{-(h^2x^2+h'^2y^2)}$$

eine transscendente Fläche, die sich ins unendliche erstreckt und in dem besondern Falle $h = h'$ zu einer Rotationsfläche wird.

Die Kurven gleicher Wahrscheinlichkeit haben die Gleichung

$$h^2x^2 + h'^2y^2 = c^2,$$

sind demnach ähnliche, konzentrische und ähnlich liegende Ellipsen, Fehlerellipsen genannt, in dem besondern Falle $h = h'$ konzentrische Kreise.

3. Punkte im Raume.

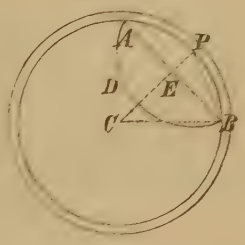
47. **Problem I.** *Innerhalb einer Kugel vom Halbmesser* r *werden zwei Punkte willkürlich angenommen; die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass ihre gegenseitige Entfernung kleiner ist als eine gegebene Länge* c.

Lösung. Die Anzahl aller Punktepaare in der Kugel ist $\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^2$; bezeichnet also g die Anzahl der günstigen Fälle, so ist

$$1) \qquad p = \frac{g}{\frac{16}{9}\pi^2 r^6}.$$

Um g zu finden, suchen wir die Änderung dg, welche diese Zahl erleidet, wenn der Halbmesser der Kugel um dr zunimmt, während c unverändert bleibt. Zu den früheren günstigen Fällen treten jene hinzu, bei welchen einer der beiden Punkte in die unendlich dünne Kugelschale fällt, deren Halbmesser r und $r + dr$ sind; die Fälle, wo beide Punkte in dieser Kugelschale liegen, können vernachlässigt werden, da ihr Mass unendlich klein höherer Ordnung ist. Ist beispielsweise der eine Punkt in P (Fig. 26), so tritt ein günstiger Fall ein, wenn der andere Punkt Q in den linsenförmigen Raum fällt, welcher der gegebenen und einer aus P als Mittelpunkt mit der Länge c als Halbmesser beschriebenen Kugel gemeinsam ist. Bezeichnet man den Inhalt dieses Raumes mit V, so ist, da P und Q vertauscht werden können,

Fig. 26.



$$dg = 2 \,.\, 4\pi r^2 \, dr \,.\, V.$$

Der linsenförmige Raum zerfällt in zwei Segmente, deren gemeinsame Grundfläche den Halbmesser $\frac{c}{2r}\sqrt{4r^2 - c^2}$ hat; das eine, zur Kugel vom Halbmesser r gehörig, hat die Höhe $\frac{c^2}{2r}$, das andere, zur Kugel vom Halbmesser c gehörig,

die Höhe $\frac{c(2r-c)}{2r}$; mit diesen Dimensionen findet man leicht

$$V = \frac{2}{3}\pi c^3 - \frac{1}{4}\pi\frac{c^4}{r}$$

und damit weiter

$$dg = 8\pi^2\left(\frac{2}{3}c^3r^2 - \frac{1}{4}c^4r\right)dr.$$

Durch Integration ergiebt sich nun das gesuchte

2) $$g = 8\pi^2\left(\frac{2}{9}c^3r^3 - \frac{1}{8}c^4r^2 + C\right),$$

worin C die noch zu bestimmende Integrationskonstante ist. Durch Substitution dieses Wertes in Formel 1) findet man

$$p = \frac{c^3}{r^3} - \frac{9}{16}\frac{c^4}{r^4} + \frac{9}{2}\frac{C}{r^6}.$$

Zur Ermittelung von C dient die Bemerkung, dass für $c = 2r$ jedes Paar willkürlich angenommener Punkte eine Entfernung kleiner als c hat, dass also in diesem Falle $p = 1$ wird; es ist also

$$1 = 8 - 9 + \frac{9}{2}\cdot 64\frac{C}{c^6},$$

woraus

$$\frac{9}{2}C = \frac{1}{32}c^6,$$

folgt, so dass schliesslich

3) $$p = \frac{c^3}{r^3} - \frac{9}{16}\frac{c^4}{r^4} + \frac{1}{32}\frac{c^6}{r^6}.$$

Anmerkung. Interessant ist die von S. Roberts gemachte Bemerkung, dass

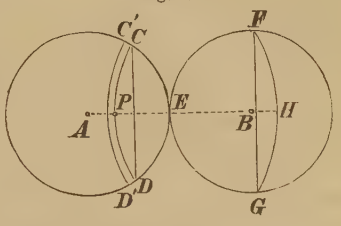
$$p = \frac{2\,\text{Segment } ADB + \text{Segment } APB}{\text{Inhalt der Kugel } C};$$

eine ähnliche Beziehung ergiebt sich bei der analogen Aufgabe in der Ebene.

48. **Problem II.** *In jeder von zwei sich berührenden gleichen Kugeln wird ein Punkt beliebig angenommen; welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte kleiner ist als der Durchmesser der Kugeln?*

Lösung. A, B (Fig. 27) sind die Mittelpunkte der gegebenen Kugeln, r ihr Halbmesser. Der eine der beiden Punkte, P, falle in ein Element der Kugel A, welches aus dieser durch zwei aus B mit den Halbmessern x und $x + dx$ beschriebene Kugelflächen ausgeschnitten wird; bezeichnet man die Oberfläche des Kugelsegments CPD mit u, so ist die Wahrscheinlichkeit einer so beschaffenen Lage des Punktes P

Fig. 27.



$$1) \qquad \frac{u\,dx}{\frac{4}{3}\pi r^3}.$$

Um die günstigen Lagen des zweiten Punktes Q zu ermitteln, beschreibe man aus P mit dem Halbmesser $2r$ eine Kugelfläche, welche von der Kugel B den linsenförmigen Raum $FEGHF$ abschneidet: so oft der Punkt Q in diesen Raum, dessen Inhalt v heissen möge, fällt, ist den Bedingungen der Aufgabe entsprochen. Die Wahrscheinlichkeit dieses einfachen Ereignisses ist

$$2) \qquad \frac{v}{\frac{4}{3}\pi r^3},$$

daher die vollständige zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit dafür, dass $PQ < 2r$ ist,

$$3) \qquad p = \frac{9}{16\pi^2 r^6}\int_r^{3r} uv\,dx.$$

Nun findet man leicht

$$u = \frac{\pi}{2r}(4rx^2 - 3r^2x - x^3),$$

$$v = \frac{1}{12}\pi\left(x^3 - 30r^2x + 72r^3 - \frac{27r^4}{x}\right);$$

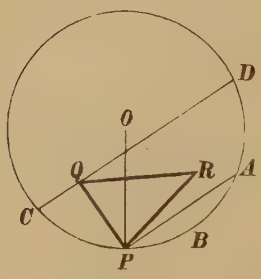
folglich ist

$$4)\quad p = \frac{3}{128 r^7} \int_r^{3r} (81 r^6 - 324 r^5 x + 405 r^4 x^2 - 192 r^3 x^3 + 27 r^2 x^4 + 4 r x^5 - x^6)\, dx = \frac{13}{35}.$$

49. **Problem III.** *Innerhalb einer Kugel werden drei Punkte willkürlich angenommen. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die Punkte Ecken eines spitzwinkligen Dreiecks sind.*

Lösung. Da die verlangte Wahrscheinlichkeit von dem Halbmesser der Kugel unabhängig sein wird, so ist es gestattet, den vom Mittelpunkte entferntesten der drei Punkte in der Oberfläche der Kugel anzunehmen. Heisst dieser Punkt P, sind Q, R die beiden anderen Punkte, so wird für jeden der drei Punkte die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln sein, dass der Winkel, dessen Scheitel er bildet, ein stumpfer ist, und da diese drei Ereignisse sich gegenseitig ausschliessen, so giebt die Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten die vollständige Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Dreieck PQR stumpfwinklig ist. Überdies ist sofort zu erkennen, dass die Punkte Q, R gleiche Rolle spielen, dass also die darauf bezüglichen Wahrscheinlichkeiten gleich sein werden.

Fig. 28.



1. Wahrscheinlichkeit, dass der Winkel bei P stumpf ist. Um sie zu finden, halten wir den zweiten Punkt Q (Fig. 28) fest, legen die Ebene PA normal zu PQ und erkennen nun, dass der Winkel QPR stumpf sein wird, wenn der dritte Punkt R in das Segment PAB fällt, was mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\text{Inhalt des Segments } PAB}{\text{Inhalt der Kugel}},$$

oder, indem man $OP = r$, $PQ = \varrho$, $\angle OPQ = \theta$ setzt, mit der Wahrscheinlichkeit

$$1) \qquad \frac{\frac{1}{3}\pi r^3 (1-\cos\theta)^2 (2+\cos\theta)}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{1}{4}(1-\cos\theta)^2(2+\cos\theta)$$

zu erwarten ist. Das Element der Kreisfläche bei Q, welches den Änderungen $d\varrho$, $d\theta$ von ϱ, θ entspricht, ist $\varrho\, d\theta\, d\varrho$, daher das Element der Kugel bei Q gleich $\varrho\, d\theta\, d\varrho \,.\, 2\pi\varrho \sin\theta$, folglich die Wahrscheinlichkeit einer durch die Argumente ϱ, θ charakterisierten Lage des Punktes Q

$$2) \qquad \frac{2\pi\varrho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varrho}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{2r^3}\varrho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varrho.$$

Aus den beiden einfachen Wahrscheinlichkeiten 1) und 2) ergiebt sich die vollständige zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit eines stumpfen Winkels bei P:

$$3) \quad \begin{cases} p_P = \dfrac{3}{8r^3}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2r\cos\theta} (1-\cos\theta)^2(2+\cos\theta)\,\varrho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varrho \\ \quad = \dfrac{3}{8r^3}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2r\cos\theta} (2-3\cos\theta+\cos^3\theta)\,\varrho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varrho \\ \quad = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-3\cos\theta+\cos^3\theta)\cos^3\theta \sin\theta\, d\theta = \dfrac{3}{70}. \end{cases}$$

2. Wahrscheinlichkeit, dass der Winkel bei Q stumpf ist. Bei unveränderter Lage von Q wird der Winkel PQR ein spitzer sein, wenn der dritte Punkt R in das Segment CDB fällt, welches durch die zu PQ normale durch Q gelegte Ebene CD abgeschnitten wird; letzteres ist mit der Wahrscheinlichkeit

$$4) \quad \begin{cases} \dfrac{\text{Inhalt d. Segm. } CDB}{\text{Inhalt der Kugel}} = \dfrac{\frac{1}{3}\pi r^3 \left(1-\cos\theta+\frac{\varrho}{r}\right)^2 \left(2+\cos\theta-\frac{\varrho}{r}\right)}{\frac{4}{3}\pi r^3} \\ \qquad = \dfrac{1}{4}\left(1-\cos\theta+\dfrac{\varrho}{r}\right)^2 \left(2+\cos\theta-\dfrac{\varrho}{r}\right) \end{cases}$$

zu erwarten, und da die Wahrscheinlichkeit der bezeichneten Lage von Q dieselbe ist wie sie vorhin in Gleichung 2) gefunden wurde, so ist die vollständige Wahrscheinlichkeit eines spitzen Winkels bei Q

$$1 - p_Q = \frac{3}{8r^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2r\cos\theta}\left(1-\cos\theta+\frac{\varrho}{r}\right)^2\left(2+\cos\theta-\frac{\varrho}{r}\right)\varrho^2\sin\theta\,d\theta\,d\varrho$$

$$= \frac{3}{8r^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2r\cos\theta}\Big(2 - 3\cos\theta + \cos^3\theta + 3\frac{\varrho}{r}\sin^2\theta + 3\frac{\varrho^2}{r^2}\cos\theta - \frac{\varrho^3}{r^3}\Big)\varrho^2\sin\theta\,d\theta\,d\varrho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2 + \frac{3}{2}\cos\theta - \frac{3}{10}\cos^3\theta\right)\cos^3\theta\,d\theta = \frac{53}{70},$$

daraus die Wahrscheinlichkeit eines stumpfen Winkels bei Q

5) $$p_Q = \frac{17}{70};$$

ebenso ist

6) $$p_R = \frac{17}{70}.$$

Aus 3), 5) und 6) ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, dass das Dreieck PQR stumpfwinklig ist,

7) $$p = p_P + p_Q + p_R = \frac{37}{40},$$

und daraus die verlangte Wahrscheinlichkeit, dass es spitzwinklig ist,

8) $$q = 1 - p = \frac{33}{70}.$$

50. **Flächen gleicher Wahrscheinlichkeit.** Wie in Linien und Flächen, so kann auch im Raume die Anordnung der Punkte von der bisher vorausgesetzten gleichförmigen Verteilung abweichen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig herausgegriffener Punkt in ein bezeichnetes Raumelement fallen werde, hängt dann nicht allein von der Grösse, sondern auch von der Lage dieses Elementes ab.

Bezieht man den Raum auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem und betrachtet das parallelepipedische Element, dessen Anfangskoordinaten x, y, z und dessen Dimensionen dx, dy, dz sind, so erscheint die Wahrscheinlichkeit für einen Punkt dieses Elementes in der Form

1) $$p = \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

und es ist die Funktion

2) $$u = k\varphi(x, y, z)$$

der Punktdichte in dem betrachteten Elemente proportional. Fasst man das Wort „Dichte" im physikalischen Sinne auf, indem man den Raum mit Materie sich angefüllt denkt, so kann die Wahrscheinlichkeit eines Punktes in einem irgendwie begrenzten Teile des Raumes gedeutet werden als das Verhältnis der Masse in diesem Raumteile zur Masse im ganzen in Betracht kommenden Raume.

Ist $u =$ Konstante $= ck$, so wird

3) $$\varphi(x, y, z) = c;$$

diese Gleichung stellt eine Fläche dar, auf welcher gleiche Dichte der Punkte herrscht oder eine Fläche gleicher Wahrscheinlichkeit, weil ein beliebig angenommener Punkt gleich grossen, an eine solche Fläche sich anschliessenden Raumelementen mit gleicher Wahrscheinlichkeit angehören kann.

51. **Beispiel.** *Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes im Raume sind gemessen worden; jeder der Messungen kann ein Fehler zwischen den Grenzen* $\pm$a *anhaften, doch nimmt die Wahrscheinlichkeit eines Fehlerbetrages proportional mit seiner Grösse ab. Es ist die Wahrscheinlichkeit einer Lage des zu bestimmenden Punktes zu ermitteln.*

Lösung. Der Mittelpunkt des Koordinatensystems, welches der folgenden Betrachtung zu Grunde liegt, ist die wahre (unbekannte) Lage des festzulegenden Punktes.

Betrachten wir eine Lage P oder besser jene benachbarten Lagen desselben, welche aus Fehlern in den Koordinaten entspringen, die beziehungsweise zwischen x und $x + dx$, y und $y + dy$, z und $z + dz$ liegen! Die einfachen Wahrscheinlichkeiten der genannten Fehler sind (vergl. Nr. 46):

$$\frac{a-x}{a^2}\,dx, \quad \frac{a-y}{a^2}\,dy, \quad \frac{a-z}{a^2}\,dz,$$

die Wahrscheinlichkeit ihres Zusammentreffens oder einer Lage des Punktes von der beschriebenen Beschaffenheit ist

$$1) \qquad p = \frac{(a-x)(a-y)(a-z)}{a^6}\,dx\,dy\,dz.$$

Die allgemeine Gleichung der Flächen gleicher Wahrscheinlichkeit lautet

$$2) \qquad (a-x)(a-y)(a-z) = c^3.$$

Alle möglichen Lagen des Punktes erfüllen einen Würfel von der Seite $2a$ und dem Mittelpunkte O; die Flächen gleicher Wahrscheinlichkeit sind in den Oktanten dieses Würfels symmetrisch angeordnet und je acht Flächen, welche zu demselben numerischen Werte von c gehören, hängen in den Ebenen yz, zx, xy längs gleichseitiger Hyperbeln zusammen.

Anmerkung. Befolgen die Fehler in den Koordinaten das Gauss'sche Fehlergesetz, so ergiebt sich für einen Punkt, dessen Koordinaten Fehler zwischen den Grenzen x und $x+dx$, y und $y+dy$, z und $z+dz$ anhaften, die Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{h\,h'\,h''}{\sqrt{\pi^3}}\,e^{-(h^2x^2+h'^2y^2+h''^2z^2)}\,dx\,dy\,dz.$$

Die Flächen gleicher Wahrscheinlichkeit haben dann die allgemeine Gleichung

$$h^2x^2 + h'^2y^2 + h''^2z^2 = c^2,$$

sind also konzentrische, ähnliche Ellipsoide von ähnlicher Lage; man könnte sie analog den Fehlerellipsen in der Ebene Fehlerellipsoide nennen. Sind zwei der Konstanten h gleich, so sind es insbesondere Rotationsellipsoide, und für den Fall $h = h' = h''$ Kugelflächen.

Zweites Kapitel.

Willkürlich gezogene Gerade.

1. Gerade in der Ebene.

52. Eine Gerade ist als „willkürlich gezogen“ im weitesten Sinne des Wortes zu bezeichnen, wenn die gegebenen Bedingungen, welche sie zu erfüllen hat, zu ihrer Bestimmung nicht ausreichen.

Bei Geraden in der Ebene können drei Hauptfälle unterschieden werden.

1. Gegeben ist eine Ebene und in derselben ein Punkt; durch den Punkt ist in der Ebene eine Gerade zu führen. Die Richtung der Geraden ist unbestimmt, kann also beliebig angenommen werden. (Gerade von beliebiger Richtung.)

2. Gegeben ist eine Ebene und in derselben eine Richtung; es soll in der Ebene eine Gerade von der gegebenen Richtung gezogen werden. Die Lage der Geraden ist nicht bestimmt, kann daher willkürlich angenommen werden. (Beliebige Gerade von gegebener Richtung.)

3. Gegeben ist eine Ebene; es soll in derselben eine Gerade verzeichnet werden. Lage und Richtung sind unbestimmt, also beide beliebig anzunehmen. (Willkürlich gezogene Gerade.)

In den beiden ersten Fällen ist die Willkür eine beschränkte, im dritten Falle eine unbeschränkte.

Unter den ersten Fall wäre auch die folgende Forderung zu stellen: In einer gegebenen Ebene ist ein Punkt willkürlich anzunehmen und durch denselben eine Gerade zu ziehen. Wenn hier von vornherein auch Richtung und Lage unbestimmt sind, so ist doch nur die Richtung beliebig; denn sobald der Punkt angenommen ist — und das hat der Verzeichnung der Geraden voranzugehen — bleibt für die letztere nur eine beschränkte Willkür zurück.

Dagegen kann eine Gerade, entstanden durch Verbindung zweier willkürlich angenommener Punkte, im obigen Sinne nicht als willkürlich gezogen gelten; die ganze Willkür haftet hier den beiden Punkten an, und sind diese angenommen, so ist die Gerade bestimmt.

53. **Theorem I.** *Die Anzahl der Geraden (Strahlen), welche durch einen gegebenen Punkt zwischen zwei festen gegebenen Geraden (Strahlen) gezogen werden können, wird durch den Winkel dieser Geraden (Strahlen) gemessen.*

Die Gründe hierfür liegen in den allgemeinen Sätzen, welche in Nr. 3 der Einleitung entwickelt worden sind. Stellt man die Gleichung der Geraden in der Form

$$x \cos\theta + y \sin\theta = 0$$

oder

$$y = tang\,\theta \,.\, x$$

auf, indem man den gegebenen Punkt als Ursprung wählt, so bilden die Werte von θ, welche den durch diesen Punkt gezogenen Geraden entsprechen, eine einfach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit, deren Inhalt, wenn θ_1, θ_2 sich auf die zwei festen Geraden beziehen, gleichkommt

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \theta_2 - \theta_1,$$

d. i. dem Winkel der beiden festen Geraden.

Diese Messungsweise entspringt aus der Vorstellung, dass die Gesamtheit aller Geraden durch einen gegebenen Punkt aus einem Geradenbüschel entsteht, in welchem die aufeinander folgenden Geraden unter sich gleiche, ins unendliche abnehmende Winkel einschliessen.

Aus dem obigen Satze folgt, dass die Anzahl aller Geraden durch einen gegebenen Punkt durch π, die Anzahl aller Strahlen durch 2π gemessen wird.

54. **Theorem II.** *Die Anzahl der Geraden, welche in gegebener Richtung zwischen zwei gegebenen Grenzlagen gezogen werden können, wird durch den senkrechten Abstand der Grenzlagen gemessen.*

Schreibt man nämlich die Gleichung der Geraden in der Form:

$$x \cos\theta + y \sin\theta = p,$$

wobei θ der gegebenen Richtung entspricht, so bilden die den gedachten Geraden zukommenden Werte von p eine einfach ausgedehnte konkrete Mannigfaltigkeit, deren Inhalt, wenn p_1, p_2 auf die Grenzlagen sich beziehen, gleichkommt

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = p_2 - p_1,$$

d. i. dem gegenseitigen Abstande der Grenzlagen.

Die Gesamtheit aller Geraden von gegebener Richtung hat man sich aus einem Parallelensystem entstanden zu denken, in welchem die aufeinander folgenden Geraden unter sich gleiche, ins unendliche abnehmende Abstände aufweisen.

Die beiden bisher erörterten Gesamtheiten von Geraden können auch unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte aufgefasst werden.

Die Gesamtheit der Geraden erster Art schneidet auf einem Kreise, welcher aus dem gegebenen Punkte als Mittelpunkt mit beliebigem Halbmesser beschrieben wird, eine gleichförmige Gesamtheit von Punkten aus; ebenso ergiebt eine Gesamtheit von Geraden der zweiten Art mit einer zu ihrer Richtung normalen (sowie jeder andern) Geraden eine gleichförmige Punktreihe: die willkürliche Annahme einer Geraden fällt daher mit der willkürlichen Annahme eines Punktes in jenem Kreise, beziehungsweise in der Transversalen zusammen, folglich kann die Gesamtheit der Geraden durch die Gesamtheit der zugehörigen Punkte gemessen werden, wodurch man wieder zu den aufgestellten Sätzen geführt wird.

55. Der Begriff einer in einer Ebene willkürlich gezogenen Geraden setzt sich aus dem Begriffe einer Geraden von beliebiger Richtung und aus dem Begriffe einer beliebigen Geraden von gegebener Richtung zusammen.

Die Gesamtheit aller Geraden der dritten Art hat man sich nämlich aus einem Netze von Geraden entstanden zu denken, bestehend aus kongruenten Systemen äquidistanter Parallelen, welche den Geraden eines gleichwinkligen Geradenbüschels parallel sind, indem sowohl der gegenseitige

Abstand der Geraden in den Parallelensystemen als der Winkelabstand der Geraden des Büschels ins unendliche abnimmt.

Eine andere Entstehungsweise dieses Liniennetzes folgt aus nachstehender Darstellung. Schreibt man die Gleichung der Geraden in der Form

$$x \cos\theta + y \sin\theta = p,$$

so bilden die Wertverbindungen von θ und p, welche allen Geraden der Ebene entsprechen, eine zweifach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit. Lässt man θ konstant und erteilt dem p Werte, welche eine arithmetische Reihe bilden, so wird man zu einem System äquidistanter Parallelen geführt; erteilt man dagegen bei konstantem p dem θ in derselben Weise fortschreitende Werte, so ergiebt sich eine Schar von Tangenten eines Kreises, welcher mit dem Halbmesser p aus dem Ursprunge beschrieben wird; die Berührungspunkte sind auf dem Umfange gleichförmig verteilt. Man erhält also alle den Wertverbindungen von θ und p entsprechenden Geraden, indem man aus dem Scheitel eines gleichwinkligen Geradenbüschels eine Schar äquidistanter Kreise beschreibt und an diese in allen Punkten, wo sie von den Geraden des Büschels getroffen werden, Tangenten zieht.

Mit der Messung von Gesamtheiten dritter Art werden wir uns später beschäftigen.

56. **Problem I.** *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine durch einen gegebenen oder willkürlich angenommenen Punkt beliebig gezogene Gerade mit einer festen Geraden einen zwischen den Grenzen θ und $\theta + d\theta$ liegenden, oder kurz den Winkel θ, einschliesst?*

Lösung. Die verlangte Wahrscheinlichkeit ist $\frac{d\theta}{\pi}$.

57. **Problem II.** *Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein aus einem gegebenen oder beliebig angenommenen Punkte gezogener Strahl mit einem festen Strahl den Winkel θ bildet?*

Lösung. Die geforderte Wahrscheinlichkeit ist $\frac{d\theta}{2\pi}$.

58. **Problem III.** *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine in gegebener Richtung willkürlich gezogene Gerade*

von der einen Grenzlage den Abstand x *besitzt, wenn* a *der Abstand beider Grenzlagen ist?*

Lösung. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $\frac{dx}{a}$.

59. **Problem IV.** *In einer Hyperbel, deren Asymptotenwinkel (im Bogenmasse)* α *ist, wird ein Durchmesser willkürlich gezogen. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass er mit der Hyperbel reelle Schnittpunkte ergiebt.*

Lösung. Da reelle Schnittpunkte nur dann eintreten, wenn der Durchmesser innerhalb des Asymptotenwinkels fällt, so ist die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{\alpha}{\pi},$$

für die gleichseitige Hyperbel $p = \frac{1}{2}$.

60. **Problem V.** *In der Ebene einer Hyperbel, deren Asymptotenwinkel* α *ist, wird eine Gerade beliebig gezogen. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass es zu dieser Geraden parallele Tangenten an die Hyperbel giebt?*

Lösung. Verzeichnet man den zu der gezogenen Geraden parallelen Durchmesser, so wird der in der Aufgabe gestellten Forderung nur dann entsprochen werden können, wenn derselbe in das Supplement des Asymptotenwinkels fällt, so dass

$$p = \frac{\pi - \alpha}{\pi} = 1 - \frac{\alpha}{\pi}.$$

61. **Problem VI.** *Durch den Mittelpunkt eines Rechtecks von der Länge* a *und der Breite* b *wird eine Gerade willkürlich gezogen; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie die Langseiten, respektive die Breitseiten des Rechtecks schneidet?*

Lösung. Man findet leicht

$$p_1 = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctang} \frac{a}{b},$$

$$p_2 = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctang} \frac{b}{a},$$

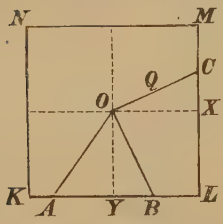
woraus wegen $p_1 + p_2 = 1$ der bekannte cyklometrische Satz folgt:

$$\operatorname{arctang} \frac{a}{b} + \operatorname{arctang} \frac{b}{a} = \frac{\pi}{2}.$$

62. **Problem VII.** *Aus dem Mittelpunkte eines Quadrates werden drei Strahlen gezogen: der erste in willkürlicher Richtung, der zweite zu einem beliebigen Punkte des Umfangs, der dritte durch einen beliebigen Punkt der Fläche; alle drei werden bis zum Umfange des Quadrates verlängert. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass der erste, der zweite, der dritte unter ihnen der längste ist.*

Lösung. Es sei $KLMN$ (Fig. 29) das Quadrat, O sein Mittelpunkt, OA der erste, OB der zweite zu dem im Umfange willkürlich angenommenen Punkte B geführte, endlich OC der dritte durch den in der Fläche beliebig bezeichneten Punkt Q gezogene Strahl. Man konstruiere OX, OY parallel zu den Seiten des Quadrates, wähle LX zur Einheit und bezeichne Winkel YOA mit θ.

Fig. 29.



Die Wahrscheinlichkeit, dass OA mit einer der Axen den Winkel θ einschliesst, ist

$$8 \cdot \frac{d\theta}{2\pi};$$

die Wahrscheinlichkeit, dass OB kürzer ist als OA, oder dass YB kleiner ist als YA, ist

$$8 \cdot \frac{AY}{\text{Umfang des Quadrates}} = tang\,\theta;$$

die Wahrscheinlichkeit, dass OC kleiner ist als OA, oder dass das Dreieck OXC höchstens gleichkommt dem Dreieck OAY, ist

$$8 \cdot \frac{\Delta\, OAY}{\text{Fläche des Quadrates}} = tang\,\theta;$$

daraus ergiebt sich die vollständige zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit dafür, dass OA am grössten ist,

$$1) \qquad p_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} tang^2\theta \,.\, d\theta = \frac{4}{\pi} - 1.$$

Durch ähnliche Betrachtungen findet man mit $YB = y$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass OB am grössten,

$$2) \qquad p_2 = \frac{4}{\pi}\int_0^1 y \, arc\,tang\, y \, dy = 1 - \frac{2}{\pi}$$

und mit $XC = x$ die Wahrscheinlichkeit, dass OC am grössten,

$$3) \qquad p_3 = \frac{4}{\pi}\int_0^1 x \, arc\,tang\, x \, dx = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

Wie notwendig, ist $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

63. **Problem VIII.** *Es ist die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass die Resultierende zweier in Richtung und Grösse willkürlicher Kräfte in der Ebene die grösste, beziehungsweise kleinste, mittlere der drei Kräfte ist.*

Lösung. Bezeichnet man die Komponenten mit x, y, den Winkel, welchen sie einschliessen, mit θ, und die Resultierende mit z, so ist

$$1) \qquad z^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta.$$

Es genügt, die Werte von θ auf das Intervall 0 bis $\frac{\pi}{2}$, jene von x und y auf ein endliches Intervall 0 bis a zu beschränken.

1. z ist unter den drei Kräften unbedingt die grösste, solange Winkel θ spitz ist; die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt $\frac{1}{2}$.

Aber auch dann, wenn θ den Betrag $\frac{1}{2}\pi$ übersteigt, kann z am grössten sein. Setzt man $\theta = \frac{1}{2}\pi + \varphi$, so schreibt sich z^2 in der Form

$$z^2 = y^2 + x(x - 2y\sin\varphi)$$

und es wird $x < y < z$, wenn $x > 2y\sin\varphi$; dabei darf, da y der höchste Wert von x ist, $\sin\varphi$ höchstens $\frac{1}{2}$, also φ höchstens $\frac{1}{6}\pi$ werden. Da dieselbe Wahrscheinlichkeit auch für $y < x < z$ gilt, so ist die vollständige Wahrschein-

lichkeit dafür, dass die Resultierende die grösste der drei Kräfte sei;

$$2) \quad p_1 = \frac{1}{2} + 2\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \frac{d\varphi}{\pi} \int_0^a \frac{dy}{a} \int_{2y\sin\varphi}^y \frac{dx}{a} = \frac{2}{3} - \frac{2-\sqrt{3}}{\pi}.$$

2. Aus $z^2 = x^2 + y(y - 2x\sin\varphi)$ folgt, dass $z < x < y$, wenn $y < 2x\sin\varphi$; und da x der kleinste Wert von y ist, so muss $\sin\varphi$ mindestens $\frac{1}{2}$, oder φ mindestens $\frac{1}{6}\pi$ sein. Die Wahrscheinlichkeit also, dass die Resultierende die kleinste der drei Kräfte sei, oder dass entweder $z < x < y$ oder $z < y < x$ werde, ist

$$3) \quad p_2 = 2\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\pi} \int_0^a \frac{dx}{a} \int_x^{2x\sin\varphi} \frac{dy}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{3}.$$

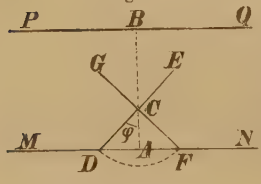
3. Daraus folgt endlich die Wahrscheinlichkeit, dass die Resultierende die mittlere der drei Kräfte ist,

$$4) \quad p_3 = 1 - p_1 - p_2 = \frac{2}{3} - \frac{2(\sqrt{3}-1)}{\pi}.$$

64. **Problem IX. (Buffons Nadelproblem.)** *Eine Ebene ist durch parallele, äquidistante Gerade in Streifen zerlegt; eine cylindrische, sehr dünne Nadel, deren Länge höchstens gleichkommt dem gegenseitigen Abstande der Parallelen, wird willkürlich auf dieselbe geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine der Teilungslinien trifft?*

Lösung. MN, PQ (Fig. 30) seien irgend zwei benachbarte Teilungslinien; ihr Abstand $AB = a$. Angenommen, der Mittelpunkt der Nadel falle nach C, so dass seine Entfernung von MN, d. i. $AC = x$ ist; die bezügliche Wahrscheinlichkeit ist $\frac{dx}{a}$. Beschreibt man aus C mit der halben Länge r der Nadel den Kreisbogen DF, verzeichnet die Lagen DCE, FCG der Nadel, so wird MN von

Fig. 30.



dieser getroffen, wenn sie innerhalb des Winkels $DCF = 2\varphi$ fällt; die bezügliche Wahrscheinlichkeit ist $\frac{2\varphi}{\pi}$.

Daraus folgt die vollständige zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, dass MN von der Nadel getroffen wird, solange ihr Mittelpunkt über $M\bar{N}$ fällt,

$$\frac{2}{\pi a}\int_0^r \varphi\, dx = \frac{2}{\pi a}\int_0^r \arccos\frac{x}{r}\, dx = \frac{2r}{\pi a};$$

derselbe Wert ergiebt sich unter der Voraussetzung, dass der Mittelpunkt der Nadel unter MN zu liegen kommt. Die verlangte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$p = \frac{4r}{\pi a}.^*$$

65. **Historische Notiz.** Das vorliegende Problem war eines der ersten, welches auf dem Gebiete der geometrischen Wahrscheinlichkeit gestellt und gelöst worden ist. Es ist bemerkenswert, dass Buffon, dessen Forschungsgebiet der Mathematik doch ferne lag, es war, der zur Lösung einer so fremdartigen Aufgabe den richtigen Weg einschlug und dadurch für einen neuen Zweig der Wahrscheinlichkeitsrechnung den Grund gelegt hat.

Er eröffnet den XXIII. Abschnitt seines „Versuchs einer moralischen Arithmetik“** mit den Worten: „Die Analyse ist das einzige Instrument, dessen man sich bis jetzt in der Wissenschaft der Probabilitäten zur Bestimmung und Feststellung der Beziehungen des Zufalls bedient hat; die Geometrie würde zu einem so wankenden Gegenstande wenig geeignet sein; betrachtet man es aber in der Nähe, wird man leicht erkennen, dass dieser Vorteil der Analyse vor der Geometrie gänzlich zufällig ist, und der Glücksfall, je nachdem er modifiziert und bedingt wird, ebensowohl in das Gebiet der Geometrie, als in das der Analyse gehört ...

---

* Eine zweite Lösung, zugleich Verallgemeinerung dieses Problems s. Nr. 82.

** Buffon's sämtliche Werke, deutsch von B. Rave. 1840, 4. Bd., pag. 441—498.

Um demnach die Geometrie in Besitz ihrer Rechte auf die Wissenschaft des Glücksfalles zu setzen, braucht man nur Spiele zu erfinden, die sich auf die Ausdehnung und ihre Verhältnisse gründen, oder die kleine Zahl derer zu berechnen, die von dieser Art schon erfunden sind.“ Sodann wendet er sich zur Lösung einiger Aufgaben über das „franc-carreau“-Spiel, welches darin besteht, dass man auf einen mit gleichen, regulären Platten getäfelten Boden eine Münze wirft und wettet, dass keine oder ein, zwei, drei ... Fugen gedeckt werden. Das zur Lösung angewandte Prinzip ist richtig, die Scheidung der günstigen und ungünstigen Fälle jedoch nicht immer korrekt durchgeführt.*

Buffon bemerkt weiter, dass die Aufgabe „etwas mehr Geometrie“ erfordere, wenn das geworfene Stück eine andere als die Kreisform besitzt, und geht dann zu dem Nadelproblem über, welches er in ganz korrekter Weise mit Hilfe der Integralrechnung löst. Den Fall aber, dass die Ebene statt mit einer mit zwei Scharen äquidistanter Parallelen überzogen ist, welche sie in kongruente Quadrate zerlegen, behandelt er fehlerhaft. (Vergl. Nr. 68, Anmerkung.)

Von den einfachen Beispielen über das „franc-carreau“-Spiel abgesehen, über welche Buffon bereits 1733 der Akademie (s. Histoire de l'Academie de France pour 1733, pag. 43—45) kurze Mitteilung gemacht hat, wäre die Abfassung des „Versuchs einer moralischen Arithmetik“ nach Gourands „Histoire du Calcul des Probabilités depuis ses origines jusqu'à nos jours“ (Paris 1848) in die Zeit um 1760 zu versetzen**, welche demnach als die Zeit der Begründung der Theorie geometrischer Wahrscheinlichkeiten zu bezeichnen wäre.

Von 1760 bis 1812 ist über den Gegenstand nichts zu verzeichnen. In seiner im letztgenannten Jahre erschienenen „Théorie analytique des Probabilités“ behandelt Laplace auf pag 359—362 Buffons Nadelproblem wieder und einen

* Überdies sind einige der Resultate durch Druckfehler entstellt.

** Vergl. J. Todhunter „A History of the mathematical Theory of Probability from the time of Pascal to that of Laplace“ (Cambridge and London, Macmillan, 1865), pag. 344.

schwierigeren Fall desselben, wo nämlich die Ebene in kongruente rechteckige Felder geteilt ist, ohne jedoch den Ursprung dieser Aufgaben zu erwähnen.* Sie bilden in Laplaces grossem Werke den Schluss des 5. Kapitels: „Application du Calcul des Probabilités, à la recherche des phénomènes et de leur causes.“ Nachdem von der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Astronomie, Physiologie, Medizin, politische Ökonomie, auf den Einfluss moralischer Ursachen, auf die Untersuchung von Glücksspielen, deren Komplikation eine direkte Behandlung nicht zulässt und wo daher Beobachtungen zu Hilfe genommen werden müssen, gesprochen worden, wird der Übergang zu dem in Rede stehenden Problem durch die Worte vermittelt: „Enfin, on pourrait faire usage du calcul des probabilités, pour rectifier les courbes ou carrer leurs surfaces. Sans doute, les géomètres n'emploiront pas ce moyen; mais comme il me donne lieu de parler d'un genre particulier de combinaisons du hasard, je vais l'exposer en peu de mots.“ Die Einfügung der Aufgaben in das System ist demnach eine eigentümliche; sie erfolgt an einer Stelle, wo man es nicht vermuten sollte.

Seit etwa dreissig Jahren wird das neue Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung namentlich von englischen und französischen Mathematikern mit Vorliebe kultiviert; Zeugnis davon legen die überaus zahlreichen Probleme ab, welche insbesondere in englischen Fachzeitschriften erschienen sind und deren Lösungen wiederholt zu interessantem Meinungsaustausch über die Grundlagen des neuen Gegenstandes Veranlassung gegeben haben.

Zwei Werke über Integralrechnung, und zwar J. Todhunters „A Treatise on the Integral Calculus etc.“ (Cambridge and London, Macmillan, II. Aufl., 1862) und B. Williamsons „An elementary Treatise on the Integral Calculus etc.“ (London, Longmans, III. Aufl., 1880) haben der geometrischen Wahrscheinlichkeit und den geometrischen

* Infolgedessen wird häufig Laplace als Urheber des Nadelproblems bezeichnet.

Mittelwerten ein besonderes Kapitel gewidmet; in letztgenanntem Werke hat dieses Kapitel Crofton zum Verfasser.

66. Anmerkung. Buffons Nadelproblem bietet ein weiteres Interesse dadurch, dass es eines von den wenigen über geometrische Wahrscheinlichkeit ist, welche auch auf experimentellem Wege bestätigt wurden.

Die wesentliche Schwierigkeit bei Ausführung derartiger Versuche beruht in der Forderung, die Experimente so einzurichten, dass dem Begriffe der Willkür Rechnung getragen werde. Werden auf einer irgendwie begrenzten ebenen Fläche Punkte beliebig angenommen, so sollte, je grösser ihre Zahl, ihre Verteilung über die Fläche um so gleichförmiger ausfallen. Man wird aber finden, dass die Dichte der Punkte gegen den Umfang der Figur abnimmt, und zwar aus dem Grunde, weil die Forderung, dass die Punkte innerhalb der Figur angenommen werden sollen, gewissermassen ein Fernhalten von der Grenze und daher eine geringere Punktdichte in deren Nähe zur Folge hat. Um diesem Einflusse zu begegnen, müsste man die Punkte ohne Rücksicht auf den Umfang der Figur in der erweiterten Ebene annehmen, und alle Punkte, welche ausserhalb der Figur gefallen sind, ausser Acht lassen. Ähnliche Bemerkungen gelten über die Annahme von Punkten in Linien, im Raume.

Ebenso muss bei Annahme gerader Linien in einer Ebene besondere Vorsicht darauf verwendet werden, dass alle Richtungen, eventuell auch Lagen, mit gleicher Leichtigkeit auftreten können, dass keine Tendenz vorhanden ist, diese oder jene Richtungen oder Lagen häufiger herbeizuführen als andere.

Professor Dr. R. Wolf in Zürich, welcher vor Jahren zahlreiche Versuchsreihen zur Bestätigung des Gesetzes der grossen Zahlen abgeführt hat, dehnte dieselben auch auf Buffons Nadelproblem aus, das ihm aus L. Lalannes „Un million de faits“ (Paris, 3. Aufl., 1843), jedoch ohne Begründung des Resultates, bekannt geworden war.* Auf einer

* Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern, 1850, pag. 85—88.

Tafel von 1 Quadratfuss wurde eine Reihe von Parallelen im gegenseitigen Abstande von 45 mm gezogen und aus einer Stricknadel ein Stück von 36 mm Länge herausgebrochen. Von den drei Serien angestellter Versuche hat nur die dritte hier ein Interesse; es wurden 50 mal je 100 Würfe ausgeführt, und um der „willkürlichen Richtung“ der Nadel Rechnung zu tragen, erhielt die Tafel eine beständige Drehung. Unter je 100 Würfen war die Anzahl der Fälle, wo die Parallelen getroffen wurden:

41	in 1	Vers.,	53	in 2	Vers.,
42	„ 3	„	54	„ 1	„
43	„ 2	„	55	„ 1	„
45	„ 7	„	56	„ 2	„
46	„ 2	„	57	„ 1	„
47	„ 1	„	58	„ 1	„
48	„ 3	„	59	„ 1	„
49	„ 2	„	60	„ 2	„
50	„ 3	„	61	„ 1	„
51	„ 8	„	62	„ 2	„
52	„ 3	„	63	„ 1	„

2532 in 50 Versuchen = 50 × 100 Würfen.

Das hieraus abgeleitete Verhältnis der Anzahl der günstigen Fälle zur Gesamtzahl der Versuche ist

$$p' = \frac{2532}{5000} = 0{,}5064,$$

während die theoretische Formel für $2r = 36$ und $a = 45$ ergiebt

$$p = 0{,}5093.$$

Die Übereinstimmung des Versuchs mit der Theorie kann also als eine sehr befriedigende bezeichnet werden, indem der Unterschied beider Resultate nur 0,0029 beträgt.

Wolf hat die Zahlen der ersten Vertikalreihe einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate unterworfen, indem er sie als Ergebnisse von 50 gleich genauen Beobachtungen betrachtet; nach dieser Rechnung (vergl. Wolfs Handbuch der Mathem., Phys. etc., 1. Bd., pag. 277) ergiebt sich unter 100 Würfen die wahrschein-

lichste Anzahl der Fälle, wo die Parallelen getroffen werden, gleich 50,64 mit dem mittleren Fehler $\pm$ 0,84, wonach das Verhältnis der günstigen zur Anzahl aller Versuche zwischen den mittleren Grenzen 0,5064 $\pm$ 0,0084 sich bewegt, zwischen welchen der theoretische Wert thatsächlich enthalten ist.

Da Lalanne a. a. O. die Bemerkung macht, man könne durch Versuche der beschriebenen Art zu einer um so genaueren Bestimmung der Zahl π gelangen, je grösser man die Versuchsreihe macht, so benützt Wolf die Ergebnisse seiner Versuche auch zu dieser Rechnung. Aus der theoretischen Formel folgt

$$\pi = \frac{4r}{a} \cdot \frac{1}{p};$$

setzt man hier für p den aus der Beobachtung abgeleiteten Wert $p' = 0{,}5064$ ein, und rechnet mit dessen mittlerem Fehler $\mu = \pm\, 0{,}0084$ den mittleren Fehler obiger Funktion, so ergiebt sich

$$\pi' = \frac{4r}{a} \cdot \frac{1}{p'} \pm \frac{4r}{a} \cdot \frac{1}{p'^2} \cdot \mu = 3{,}1596 \pm 0{,}0524;$$

auch hier fällt der theoretische Wert von π zwischen diese durch das Experiment gelieferten Grenzen.

Wolfs Versuche geben noch Gelegenheit darüber zu sprechen, wie das Experiment einzurichten ist, um a priori bei gegebener Anzahl der Versuche möglichste Übereinstimmung mit der Theorie erwarten zu dürfen. Lalanne behauptet nämlich a. a. O.: „L'erreur sera la plus petite possible pour un nombre donné d'epreuves, lorsque la longeur a de l'aiguille sera égal au quart du produit de l'intervalle d des divisions par le rapport π", also für $a = \frac{2\pi r}{4}$, und dieser Angabe entsprechend hat Wolf bei seinen Versuchen die Dimensionen eingerichtet.

In einem Nachtrage* zu der früher citierten Arbeit, der dadurch von besonderem Interesse ist, als darin eine von dem Baseler Professor Rud. Merian gegebene theoretische

* Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern, 1850. pag. 210—212.

Lösung des Nadelproblems mitgeteilt wird, sagt Wolf, Merian bestreite die Richtigkeit obiger Angabe Lalannes und mache die Aufstellung, die grösste Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie müsse sich ergeben, wenn $a = 2r$, d. h. der Abstand der Parallelen der Länge der Nadel gleich gemacht wird. Wolf bestreitet dies, verteidigt die Angabe Lalannes und führt eine neue Reihe von 50×100 Versuchen an, die nach Merians Regel eingerichtet ein minder günstiges Resultat geliefert haben.

In der That aber ist Merians Angabe richtig. Denn bedeutet p die apriorische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, waren unter s angestellten Versuchen m diesem Ereignis günstig, so darf man nach Bernoullis Theorem mit der Wahrscheinlichkeit

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi sp(1-p)}}$$

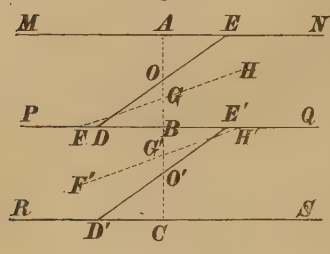
erwarten, die Differenz $p - \frac{m}{s}$ werde zwischen den Grenzen $\pm \gamma \sqrt{\frac{2p(1-p)}{s}}$ enthalten sein. Nun aber erlangen bei einem gegebenen Werte von γ (oder Π) und s diese Grenzen die grösste Ausdehnung für $p = \frac{1}{2}$, also für $a = \frac{2\pi r}{4}$, Lalannes Regel ist daher eine ganz verkehrte; dagegen werden sie wirklich am engsten, wenn p den grössten mit den Bedingungen der Aufgabe verträglichen Wert annimmt, d. i. für $a = 2r$ oder $p = \frac{2}{\pi}$. Dass Wolfs zweite Versuchsreihe eine minder gute Übereinstimmung ergab, kann aus der doch nur mässigen Zahl der Versuche erklärt werden.

67. **Problem X.** *Das vorige Problem unter der Bedingung zu lösen, dass die Länge der Nadel grösser ist als der Abstand der Parallelen.*

Lösung. MN, PQ, RS (Fig. 31, S. 92) seien drei aufeinander folgende Teilungslinien. Errichtet man zu denselben die Normale ABC, so genügt es offenbar, die Untersuchung auf jene Fälle zu beschränken, in welchen der Mittelpunkt

der Nadel auf die Strecke OO' fällt, welche die Mittelpunkte von AB und BC verbindet. Schneidet man die Parallelen aus den Punkten O und O' mit der halben Länge der Nadel $= r$ in den Punkten D, E, D', E', zieht DOE, $D'O'E'$, so erkennt man leicht, dass, solange der Neigungswinkel der Nadel gegen die Normale kleiner ist als der Winkel $BOD = \alpha$, PQ von der Nadel getroffen wird, in welchen Punkt der Strecke OO' ihr Mittelpunkt auch fallen möge.

Fig. 31.



Ist dagegen der erwähnte Neigungswinkel grösser als α, wie beispielsweise bei der Lage FH und der ihr parallelen $F'H'$, dann wird PQ von der Nadel nur dann getroffen, wenn ihr Mittelpunkt in die Strecke GG' fällt.

Bezeichnet man daher den Winkel, den die Nadel bei beliebiger Lage mit der Normale einschliesst, mit φ, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass PQ getroffen wird, ausgedrückt durch

$$p = \int_0^{\alpha} \frac{2\,d\varphi}{\pi} + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,d\varphi}{\pi} \cdot \frac{2\,r\cos\varphi}{a} = \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{4r}{\pi a}(1 - \sin\alpha).$$

Schafft man α aus dieser Formel fort, so wird

$$p = \frac{2}{\pi} \arccos\frac{a}{2r} + \frac{2}{\pi a}(2r - \sqrt{4r^2 - a^2}).$$

So erhält man für $r = a$, oder wenn die Nadel doppelt so lang ist als der Abstand der Parallelen:

$$p = \frac{2}{3} + \frac{2}{\pi}(2 - \sqrt{3}) = 0{,}8372\ldots$$

Mit wachsendem r nähert sich der Wert von p der Einheit.

68. **Problem XI.** *Eine Ebene ist durch zwei Scharen äquidistanter paralleler Geraden in kongruente Rechtecke zerlegt; eine Nadel, kürzer als jeder der beiden Abstände, wird will-*

kürlich auf die Ebene geworfen; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie die Teilungslinien trifft?

Erste Lösung.* Bezeichnet $p^{(1)}$ die Wahrscheinlichkeit, dass nur eine Linie der Schar I getroffen wird, $p^{(2)}$ die Wahrscheinlichkeit, dass nur eine Linie der Schar II getroffen wird, $p_{1,2}$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel Linien beider Scharen zugleich schneidet, so ist die geforderte Wahrscheinlichkeit

1) $$p = p^{(1)} + p^{(2)} + p_{1,2}.$$

Ist ferner p_1 die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel mit einer Linie I, und p_2 die Wahrscheinlichkeit, dass sie mit einer Linie II überhaupt zusammentrifft — Wahrscheinlichkeiten, deren Werte aus Problem IX, Nr. 64 bekannt sind, nämlich

2) $$p_1 = \frac{4r}{\pi a}, \quad p_2 = \frac{4r}{\pi b},$$

so bestehen die Beziehungen

$$p_1 = p^{(1)} + p_{1,2}, \quad p_2 = p^{(2)} + p_{1,2},$$

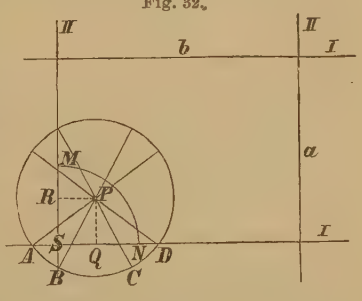
mit welchen Gleichung 1) sich verwandelt in

3) $$p = p_1 + p_2 - p_{1,2}.$$

Es erübrigt also nur die Ermittelung von $p_{1,2}$.

Fig. 32 stellt eines der Rechtecke vor. Die Nadel wird, indem ihr Mittelpunkt in dieses Rechteck fällt, die in S zusammenstossenden Seiten desselben nur dann gleichzeitig treffen können, wenn ihr Mittelpunkt innerhalb des aus S mit der halben Nadellänge r beschriebenen Quadranten SMN zu liegen kommt. Fällt er beispielsweise in den Punkt P, dessen Koordinaten $SQ = PR = x$ und $PQ = y$ sind, und beschreibt man aus P als Mittelpunkt mit dem Halbmesser r

Fig. 32.



* Vergl. hiermit Laplace „Théorie anal. d. prob.“, pag. 360 — 362.

einen Kreis, so ist leicht zu erkennen, dass ein günstiger Fall eintreten wird, wenn die Nadel in einen der Winkel APB oder CPD fällt; die Wahrscheinlichkeit hierfür ist

$$2\,\frac{arc\cos\frac{y}{r} - arc\sin\frac{x}{r}}{\pi},$$

die Wahrscheinlichkeit der angenommenen Lage des Mittelpunkts $\frac{dx\,dy}{ab}$. Integriert man das Produkt dieser einfachen Wahrscheinlichkeiten auf dem durch den Quadranten SMN begrenzten Wertgebiet und vervierfacht, weil die Rechnung für jede der vier Ecken des herausgehobenen Rechtecks denselben Wert liefert, so ergiebt sich:

$$4)\quad \begin{cases} p_{1,2} = \dfrac{8}{\pi ab}\displaystyle\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \left(arc\cos\frac{y}{r} - arc\sin\frac{x}{r}\right) dx\,dy \\ = \dfrac{8}{\pi ab}\displaystyle\int_0^r \left(\sqrt{r^2-x^2}\,arc\cos\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}} - x + r - \sqrt{r^2-x^2}\,arc\sin\frac{x}{r}\right) dx \\ = \dfrac{8}{\pi ab}\displaystyle\int_0^r (r-x)\,dx = \dfrac{4r^2}{\pi ab}. \end{cases}$$

Durch Substitution der Werte aus 2) und 4) in 3) erhält man

$$5)\qquad p = \frac{4r(a+b) - 4r^2}{\pi ab}.$$

Zweite Lösung.* Ist θ die Neigung der Nadel gegen die Linien der Schar I, so lässt sich innerhalb des in Betracht gezogenen Feldes in der aus Fig. 33 (S. 95) ersichtlichen Weise ein Rechteck $ABCD$ verzeichnen, in welches der Mittelpunkt der Nadel nicht fallen darf, wenn sie die Teilungslinien treffen soll; dagegen trifft sie eine oder beide derselben, wenn ihr Mittelpunkt ausserhalb dieses Rechtecks zu liegen kommt. Die betreffende Wahrscheinlichkeit ist

---

* Nach Todhunters „Hist. of the mathem. Theory of Probab.", pag. 347 u. 348.

$$\alpha) \quad \frac{2d\theta}{\pi} \cdot \frac{ab - (a - 2r\sin\theta)(b - 2r\cos\theta)}{ab}$$

und die vollständige Wahrscheinlichkeit des erwarteten Ereignisses

$$p = \frac{4r}{\pi ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos\theta + b\sin\theta - 2r\sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{4r(a+b) - 4r^2}{\pi ab}.$$

Anmerkung. Für quadratische Felder findet man

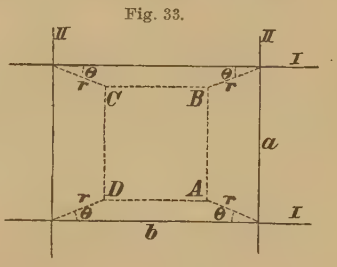
$$p = \frac{4(2a - r)r}{\pi a^2},$$

während Buffon a. a. O. (vergl. Nr. 65)

$$p = \frac{2(a - r)r}{\pi a^2}$$

gefunden hat.

Fig. 33.



69. **Problem XII.** *Das vorige Problem unter der Bedingung zu lösen, dass die Nadel länger als eine oder als beide Dimensionen der rechteckigen Felder ist.**

Lösung. Die Betrachtung, auf welche die zweite Lösung des vorigen Problems sich gründet, bleibt hier aufrecht; nur die Grenzen der Integration des Ausdrucks (α) Nr. 68 ändern sich, je nachdem eine oder beide Dimensionen des Rechtecks $ABCD$ (Fig. 33), genommen in dem Sinne $a - 2r\sin\theta$, $b - 2r\cos\theta$, negativ werden. Tritt dieser Fall ein, so deutet dies darauf, dass für solche Richtungen der Nadel die Teilungslinien getroffen werden, wohin auch der Mittelpunkt der Nadel fallen möge. Es entfällt also der zweite Faktor des Produktes (α).

1. Es sei $a < 2r < b$, die Nadel länger als der kürzere, kürzer als der grössere Abstand. Dann kann nur die Höhe AB (Fig. 33) des Rechtecks $ABCD$ negativ werden;

* Die Angaben, welche Todhunter (l. c.) über die Lösung dieses Falles macht, sind unvollständig.

die Integration des Ausdrucks (α) ist also nur auf jenes Wertgebiet von θ auszudehnen, für welches

$$2r \sin\theta < a,$$

oder

$$\theta < \arcsin\frac{a}{2r}.$$

Man hat daher

$$1)\quad \begin{cases} p = \dfrac{4r}{\pi ab}\displaystyle\int_0^{\arcsin\frac{a}{2r}} (a\cos\theta + b\sin\theta - 2r\sin\theta\cos\theta)\,d\theta + \int_{\arcsin\frac{a}{2r}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,d\theta}{\pi} \\ = \dfrac{a^2 + 4br - 2b\sqrt{4r^2 - a^2}}{\pi ab} + \dfrac{2}{\pi}\arccos\dfrac{a}{2r}. \end{cases}$$

2. Es sei $a < b < 2r$, die Nadel länger als beide Abstände. In diesem Falle können beide Dimensionen des Rechtecks $ABCD$ (Fig. 33) negativ werden. Die Integration von (α) ist also nur auf jenes Wertgebiet von θ zu beschränken, für welches gleichzeitig

$$2r\sin\theta < a \quad \text{und} \quad 2r\cos\theta < b,$$

oder

$$\theta < \arcsin\frac{a}{2r} \quad \text{und} \quad \theta > \arccos\frac{b}{2r}.$$

Mithin ist für diesen Fall

$$2)\quad \begin{cases} p = \displaystyle\int_0^{\arccos\frac{b}{2r}} \frac{2\,d\theta}{\pi} + \frac{4r}{\pi ab}\int_{\arccos\frac{b}{2r}}^{\arcsin\frac{a}{2r}} (a\cos\theta + b\sin\theta - 2r\sin\theta\cos\theta)\,d\theta + \int_{\arcsin\frac{a}{2r}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,d\theta}{\pi} \\ = \dfrac{2}{\pi}\left(\arccos\dfrac{a}{2r} + \arccos\dfrac{b}{2r}\right) + \dfrac{a^2 + b^2 + 4r^2 - 2a\sqrt{4r^2 - b^2} - 2b\sqrt{4r^2 - a^2}}{\pi ab}. \end{cases}$$

Diese letztere Herleitung gilt auch wieder nur unter der Bedingung, dass

$$\arccos\frac{b}{2r} < \arcsin\frac{a}{2r},$$

oder

$$2r < \sqrt{a^2 + b^2};$$

sobald diese nicht erfüllt, die Nadel also länger als die Diagonale eines Feldes ist, muss sie in jeder Lage die Teilungslinien treffen, es wird $p = 1$.

Sind die Felder quadratisch, $a = b < 2r < a\sqrt{2}$, so liefert Formel 2)

$$3) \quad p = \frac{4}{\pi} arc\cos\frac{a}{2r} + \frac{2a^2 + 4r^2 - 4a\sqrt{4r^2 - a^2}}{\pi a^2}.$$

Anmerkung. Lässt man in Formel 1) b ins unendliche wachsen, so wird

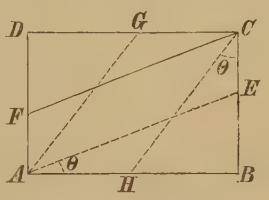
$$p = \frac{2}{\pi} arc\cos\frac{a}{2r} + \frac{2}{\pi a}(2r - \sqrt{4r^2 - a^2})$$

übereinstimmend mit dem Resultate des Problems X, Nr. 67, welches durch obige Transformation mit dem vorliegenden identisch wird.

70. **Problem XIII.** *In der Fläche eines Rechtecks wird ein beliebiger Punkt angenommen und durch denselben eine Gerade willkürlich gezogen. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die Gerade anstossende, beziehungsweise gegenüberliegende Seiten des Rechtecks schneidet.*

Lösung. 1. $ABCD$ (Fig. 34) sei das Rechteck, $AB = a$, $BC = b$. Wir suchen zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass das Seitenpaar AB, BC geschnitten werde. Liegt die Neigung der Geraden gegen AB zwischen den Grenzen 0 und $arc\,tang\,\frac{b}{a}$, so führe man durch A eine Gerade AE von der betrachteten Neigung und erhält für die gesuchte Wahrscheinlichkeit den Ausdruck

Fig. 34.



$$\frac{d\theta}{\pi} \cdot \frac{\Delta ABE}{ABCD} = \frac{a^2\, tang\,\theta}{2ab} \cdot \frac{d\theta}{\pi};$$

ist dagegen die Neigung der Geraden gegen AB innerhalb der Grenzen $arc\,tang\,\frac{b}{a}$ und $\frac{\pi}{2}$ oder gegen CB zwischen 0 und $arc\,tang\,\frac{a}{b}$ enthalten, so führe man durch C eine Gerade CH von der betrachteten Neigung θ', und erhält als Wahrscheinlichkeit, dass die willkürlich durch den beliebigen Punkt gezogene Gerade bei dieser Neigung die Seiten AB, BC trifft, den Ausdruck

$$\frac{d\theta'}{\pi} \cdot \frac{\Delta BCH}{ABCD} = \frac{b^2 \operatorname{tang} \theta'}{2ab} \cdot \frac{d\theta'}{\pi};$$

demnach ist die vollständige Wahrscheinlichkeit des erwähnten Ereignisses gleich

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\pi ab} \left\{ \int_0^{\operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a}} \frac{a^2}{2} \operatorname{tang} \theta \, d\theta + \int_0^{\operatorname{arc\,tang} \frac{a}{b}} \frac{b^2}{2} \operatorname{tang} \theta' \, d\theta' \right\} \\ &= \frac{1}{\pi ab} \left\{ \frac{a^2+b^2}{4} l \cdot (a^2+b^2) - \frac{a^2}{2} l \cdot a - \frac{b^2}{2} l \cdot b \right\} = \frac{\varphi(a,b)}{\pi ab} \end{aligned} \right.$$

Eben so gross ist sie für jedes der drei übrigen Paare anstossender Seiten, so dass die vollständige Wahrscheinlichkeit für das Schneiden benachbarter Seiten gleichkommt

$$2) \quad p_1 = \frac{1}{\pi ab} \left\{ (a^2+b^2) l.(a^2+b^2) - a^2 l.a^2 - b^2 l.b^2 \right\} = \frac{1}{\pi ab} l \cdot \frac{c^{2c c}}{a^{2a a} b^{2b b}},$$

wenn mit c die Diagonale des Rechtecks bezeichnet wird.

2. Die Gegenseiten AD, BC können nur dann geschnitten werden, wenn die Gerade gegen AB eine Neigung zwischen 0 und $arc\,tang \frac{b}{a}$ hat, und für eine bestimmte Neigung θ ist die betreffende Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2d\theta}{\pi} \cdot \frac{AECF}{ABCD} = \frac{2(ab - a^2 \operatorname{tang} \theta)}{ab} \cdot \frac{d\theta}{\pi},$$

daher für alle zulässigen Neigungen

$$3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\pi ab} \int_0^{\operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a}} 2(ab - a^2 \operatorname{tg} \theta) \, d\theta = \frac{1}{\pi ab} \left\{ 2ab \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} + 2a^2 l \cdot a - a^2 l \cdot (a^2+b^2) \right\} \\ &= \frac{\psi[a,(b)]}{\pi ab}. \end{aligned} \right.$$

Durch ähnliche Betrachtungen findet man die Wahrscheinlichkeit für das Schneiden von AB, DC, nämlich:

$$4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\pi ab} \int_0^{\operatorname{arc\,tang} \frac{a}{b}} 2(ab - b^2 \operatorname{tg} \theta') \, d\theta' = \frac{1}{\pi ab} \left\{ 2ab \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} + 2b^2 l \cdot b - b^2 l \cdot (a^2+b^2) \right\} \\ &= \frac{\psi[(a),b]}{\pi ab}; \end{aligned} \right.$$

aus 3) und 4) endlich ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit für das Schneiden gegenüberliegender Seiten überhaupt, d. i.

$$5)\quad \begin{cases} p_2 = \dfrac{1}{\pi ab}\{ab\pi + 2a^2 l.a + 2b^2 l.b - (a^2+b^2)l.(a^2+b^2)\} \\ = 1 - \dfrac{1}{\pi ab} l . \dfrac{c^{2cc}}{a^{2aa} b^{2bb}} = 1 - p_1. \end{cases}$$

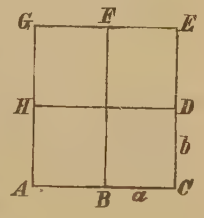
Für den besonderen Fall eines Quadrates ist

$$p_1 = \frac{2}{\pi} l . 2, \quad p_2 = 1 - \frac{2}{\pi} l . 2.$$

71. **Problem XIV.** *In einem aus vier gleichen rechteckigen Scheiben zusammengesetzten Fenster wird ein Punkt angenommen und durch denselben eine Gerade in willkürlicher Richtung gezogen. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die Gerade eine, beziehungsweise zwei, drei Scheiben kreuzt.*

Lösung. Die Fugenbreite wird als verschwindend klein vorausgesetzt und daher vernachlässigt. $ACEG$ (Fig. 35) stelle das Fenster vor, dessen Scheiben die Breite a, die Höhe b besitzen.

Fig. 35.



Zur abkürzenden Bezeichnung der Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Gerade zwei Strecken, z. B. BC und CD, schneidet, bedienen wir uns im folgenden des Symbols $p(BC, CD)$, lassen aber zur weiteren Vereinfachung auch noch den allen diesen Wahrscheinlichkeiten gemeinsamen Nenner $4\pi ab$, welcher der Anzahl aller möglichen Geraden entspricht, vorläufig hinweg. Dann ergeben sich für die verlangten Wahrscheinlichkeiten, welche wir mit p_1, p_2, p_3 bezeichnen wollen, durch Betrachtung der Figur und mit Benutzung der im vorigen Problem ermittelten, durch die Gleichungen 1), 3), 4) definierten Funktionen φ, ψ folgende Ausdrücke:

1. $p_1 = 4p(BC, CD)$, und da $p(BC, CD) = \varphi(a, b)$, so ist,

$$1)\qquad p_1 = 4\varphi(a, b).$$

2. $p_2 = 4p(AB, CD) + 4p(ED, BC) + 2p(AB, GF) + 2p(CD, AH)$;

nun ist

$$p(AB, CD) = p(AC, CD) - p(BC, CD) = \varphi(2a, b) - \varphi(a, b),$$
$$p(ED, BC) = \varphi(2b, a) - \varphi(a, b),$$
$$p(AB, GF) = \psi[(a), 2b],$$
$$p(CD, AH) = \psi[(b), 2a];$$

demnach erhält man

$$2) \quad \begin{cases} p_2 = 4\{\varphi(2a, b) + \varphi(2b, a) - 2\varphi(a, b)\} \\ \quad + 2\{\psi[(a), 2b] + \psi[(b), 2a]\}. \end{cases}$$

3. $p_3 = 4p(AB, DE) + 2p(AB, FE) + 2p(CD, HG)$;
darin ist

$$p(AB, DE) = p(AC, CE) - p(AC, CD) - p(BC, CE) + p(BC, CD)$$
$$= \varphi(2a, 2b) - \varphi(2a, b) - \varphi(2b, a) + \varphi(a, b);$$

$p(BC, CD)$ musste nämlich addiert werden, weil es Bestandteil sowohl von $p(AC, CD)$ als von $p(BC, CE)$ ist und daher zweimal subtrahiert wurde, statt bloss einmal;

$$p(AB, FE) = p(AC, GE) - p(BC, GF) - p(AB, GF) - p(BC, FE),$$

und da offenbar $p(BC, GF) = p(AB, FE)$, so hat man weiter

$$2p(AB, FE) = \psi[(2a), 2b] - 2\psi[(a), 2b],$$

analog

$$2p(CD, HG) = \psi[(2b), 2a] - 2\psi[(b), 2a];$$

folglich ist

$$3) \quad \begin{cases} p_3 = 4\{\varphi(2a, 2b) - \varphi(2a, b) - \varphi(2b, a) + \varphi(a, b)\} \\ \quad + \psi[(2a), 2b] + \psi[(2b), 2a] - 2\{\psi[(a), 2b] + \psi[(b), 2a]\}. \end{cases}$$

Schliesslich wären in den Ausdrücken 1), 2), 3) die nach den Formeln 1), 3) Nr. 70 gebildeten Werte der einzelnen Funktionen φ, ψ einzusetzen und der unterdrückte Divisor $4\pi ab$ wieder herzustellen.

Für den besonderen Fall, dass die Scheiben quadratisch sind, vereinfachen sich die Formeln wie folgt:

$$4) \quad \begin{cases} p_1 = 4\varphi(a, a), \\ p_2 = 8\{\varphi(2a, a) - \varphi(a, a)\} + 4\psi[(a), 2a], \\ p_3 = 4\{\varphi(2a, 2a) - 2\varphi(2a, a) + \varphi(a, a)\} + 2\{\psi[(2a), 2a] - 2\psi[(a), 2a]\} \end{cases}$$

darin ist auf Grund von Nr. 70

$$\varphi(a, a) = a^2(\tfrac{1}{2}l.2),$$
$$\varphi(2a, a) = a^2(\tfrac{5}{4}l.10 - \tfrac{15}{4}l.2),$$
$$\varphi(2a, 2a) = a^2(2l.2),$$
$$\psi[(a), 2a] = a^2(4\,arc\,tang\,\tfrac{1}{2} + 8l.2 - 4l.5),$$
$$\psi[(2a), 2a] = a^2(2\pi - 4l.2);$$

führt man diese Werte in die obigen Ausdrücke ein, so wird schliesslich:

$$p_1 = \frac{1}{4\pi} 2l.2,$$

$$p_2 = \frac{1}{4\pi}\left\{12l.2 - 6l.5 + 16\,arc\,tang\,\tfrac{1}{2}\right\},$$

$$p_3 = \frac{1}{4\pi}\left\{6l.5 - 14l.2 + 4\pi - 16\,arc\,tang\,\tfrac{1}{2}\right\};$$

die Summe $p_1 + p_2 + p_3$ ist richtig, wie es sein muss, gleich 1.

Werden die angedeuteten Rechnungsoperationen abgekürzt verrichtet, so ergiebt sich:

$$p_1 = 0{,}110317, \quad p_2 = 0{,}483798, \quad p_3 = 0{,}405891.$$

Anmerkung. M'Coll findet auf einem andern Wege (s. Educ. Tim., Bd. XVI, pag. 31)

für $a = \frac{4}{3}b$: $p_1 = 0{,}10833$, $p_2 = 0{,}49251$, $p_3 = 0{,}39916$,
„ $a = 2b$: $p_1 = 0{,}09955$, $p_2 = 0{,}53100$, $p_3 = 0{,}36945$.

72. Anmerkung. Zur experimentellen Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten, welche dem besonderen Falle $a = b$ entsprechen, hat Verfasser eine Reihe von Versuchen angestellt, deren Resultate nachstehend mitgeteilt werden. Mit Rücksicht auf die primitive Art, wie die Versuche gemacht worden sind, kann die Uebereinstimmung der daraus abgeleiteten Erfahrungswahrscheinlichkeiten mit den theoretischen Werten als genügend bezeichnet werden.

Auf einem kreisrunden Blatt Schreibpapier wurde die der Aufgabe entsprechende Figur mit Bleistiftlinien verzeichnet; sodann wurde mit der Bleistiftspitze blindlings ein Punkt bezeichnet und solange der Bleistift noch auf dem Papier ruhte, ein Lineal an denselben angelegt und die Linie gezogen. Selbstverständlich blieben Punkte ausserhalb der

Figur unberücksichtigt, ferner wurde nach jedem Versuche das Papierblatt gedreht.

Im ganzen sind auf sechs Blättern 2120 Versuche ausgeführt worden;

in 208 Fällen traf die Linie eine Scheibe,
„ 1064 „ „ „ „ zwei Scheiben,
„ 848 „ „ „ „ drei Scheiben,
2120

Hieraus ergeben sich die zugehörigen Erfahrungswahrscheinlichkeiten

$$0{,}098\ldots, \quad 0{,}502\ldots, \quad 0{,}400\ldots,$$

welchen die mathematischen Wahrscheinlichkeiten

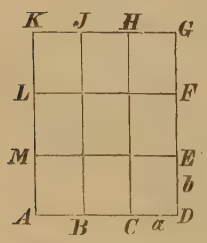
$$0{,}110\ldots, \quad 0{,}484\ldots, \quad 0{,}406\ldots,$$

gegenüberstehen.

73. **Problem XV.** *Auf einem aus neun gleichen rechteckigen Scheiben bestehenden Fenster wird ein Punkt bezeichnet und durch denselben eine Gerade in willkürlicher Richtung gezogen. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass die Gerade ein, resp. zwei, drei, vier, fünf Scheiben kreuzt.*

Lösung. Wie bei dem vorigen Problem und mit Benutzung derselben abkürzenden Bezeichnungen erhält man durch Betrachtung der Fig. 36 für die verlangten Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots p_5$ folgende Ausdrücke, in welchen der gemeinschaftliche Nenner $9\pi ab$ vorläufig unterdrückt ist.

Fig. 36.



1. $p_1 = 4p(CD, DE)$, und da $p(CD, DE) = \varphi(a, b)$, so ist

1) $$p_1 = 4\varphi(a, b).$$

2. $p_2 = 4p(BC, DE) + 4p(FE, CD)$; nun ist

$$p(BC, DE) = p(BD, DE) - p(CD, DE) = \varphi(2a, b) - \varphi(a, b),$$
$$p(FE, CD) = p(FD, CD) - p(CD, DE) = \varphi(2b, a) - \varphi(a, b);$$

daher

2) $$p_2 = 4\{\varphi(2a, b) + \varphi(2b, a) - 2\varphi(a, b)\}.$$

3. $p_3 = 4p(AB, DE) + 4p(GF, CD) + 4p(BC, EF) + 3p(AM, DE) + 3p(AB, KJ)$; darin ist

$$p(AB, DE) = p(AD, DE) - p(BD, DE) = \varphi(3a, b) - \varphi(2a, b);$$

$p(GF, CD)$ entsteht hieraus durch Vertauschung von a mit b;

$$p(BC, EF) = p(BD, DF) - p(BD, DE) - p(FD, CD) + p(CD, DE) = \varphi(2a, 2b) - \varphi(2a, b) - \varphi(2b, a) + \varphi(a, b),$$

— das Glied $p(CD, DE)$ musste hinzugefügt werden, weil es als Bestandteil von $p(BD, DE)$ sowohl als von $p(FD, CD)$ zweimal, daher einmal zuviel in Abzug kam;

$$p(AM, DE) = \psi[(b), 3a], \quad p(AB, KJ) = \psi[(a), 3b];$$

durch Substitution ergiebt sich also:

3) $$\begin{cases} p_3 = 4\{\varphi(3a,b) + \varphi(3b,a) + \varphi(2a,2b) - 2\varphi(2a,b) - 2\varphi(2b,a) + \varphi(a,b)\} \\ \quad + 3\{\psi[(b), 3a] + \psi[(a), 3b]\}. \end{cases}$$

4. $p_4 = 4p(AB, EF) + 4p(GF, BC) + 4p(BC, HG) + 4p(EF, AM)$; nun ist

$$p(AB, EF) = p(AD, DF) - p(AD, DE) - p(BD, DF) + p(BD, DE) = \varphi(3a, 2b) - \varphi(3a, b) - \varphi(2a, 2b) + \varphi(2a, b),$$

das Glied $p(BD, DE)$ wurde hinzugefügt, weil es sowohl Bestandteil von $p(AD, DE)$ als von $p(BD, DF)$ ist und daher einmal zuviel abgezogen wurde; $p(GF, BC)$ erhält man aus dem eben gewonnenen Ausdruck durch Vertauschung von a mit b;

$$p(BC, HG) = p(BD, JG) - p(CD, JH) - p(BC, JH) - p(CD, HG),$$

oder, weil offenbar $p(BC, HG) = p(CD, JH)$ und $p(BC, JH) = p(CD, HG)$ ist:

$$2p(BC, HG) = \psi[(2a), 3b] - 2\psi[(a), 3b];$$

für $p(EF, AM)$ ergiebt sich ein analoger Ausdruck durch Vertauschung von a mit b; demnach ist schliesslich

4) $$\begin{cases} p_4 = 4\{\varphi(3a, 2b) + \varphi(3b, 2a) - \varphi(3a, b) - \varphi(3b, a) \\ \qquad - 2\varphi(2a, 2b) + \varphi(2a, b) + \varphi(2b, a)\} \\ \quad + 2\{\psi[(2a), 3b] - 2\psi[(a), 3b] + \psi[(2b), 3a] - 2\psi[(b), 3a)\}. \end{cases}$$

5. $p_5 = 4p(AB, FG) + 2p(AB, HG) + 2p(GF, AM)$; darin ist

$$p(AB,FG)=p(AD,DG)-p(AD,DF)-p(BD,DG)+p(BD,DF)$$
$$= \varphi(3a, 3b) - \varphi(3a, 2b) - \varphi(2a, 3b) + \varphi(2a, 2b),$$

— $p(BD, DF)$ musste addiert werden, weil es sowohl in $p(AD, DF)$ als in $p(BD, DG)$, daher zweimal in Abzug kam;

$$p(AB, HG) = p(AD, KG) - p(AC, HK) - p(BD, JG) - p(CD, KJ) + p(BC, JH),$$

und da $p(AB,HG)=p(CD,KJ)$ und $p(AC,HK)=p(BD,JG)$, so ist

$$2p(AB, HG) = \psi[(3a), 3b] - 2\psi[(2a), 3b] + \psi[(a), 3b];$$

für $2p(GF, AM)$ ergiebt sich ein ähnlicher Ausdruck durch Vertauschung von a mit b; daher ist

$$5)\quad \left\{\begin{array}{l} p_5 = 4\{\varphi(3a, 3b) - \varphi(3a, 2b) - \varphi(2a, 3b) + \varphi(2a, 2b)\} \\ \quad + \psi[(3a), 3b] - 2\psi[(2a), 3b] + \psi[(a), 3b] + \psi[(3b), 3a] \\ \quad - 2\psi[(2b), 3a] + \psi[(b), 3a]. \end{array}\right.$$

In den Ausdrücken 1) bis 5) wären nun die nach den Gleichungen 1), 3) Nr. 70 gebildeten Werte der einzelnen Funktionen φ und ψ einzuführen und der gemeinsame Nenner $9\pi ab$ herzustellen.

Wir beschränken uns bei der weiteren Ausführung wieder nur auf den einfachsten Fall quadratischer Scheiben; die einzelnen Funktionen nehmen dann folgende Werte an:

$$\varphi(a, a) = a^2(\tfrac{1}{2}l \,.\, 2),$$
$$\varphi(2a, a) = a^2(\tfrac{5}{4}l \,.\, 10 - \tfrac{13}{4}l \,.\, 2),$$
$$\varphi(3a, a) = a^2(\tfrac{5}{2}l \,.\, 10 - \tfrac{9}{2}l \,.\, 3),$$
$$\varphi(2a, 2a) = a^2(2l \,.\, 2),$$
$$\varphi(3a, 2a) = a^2(\tfrac{14}{4}l \,.\, 13 - \tfrac{9}{2}l \,.\, 3 - 2l \,.\, 2),$$
$$\varphi(3a, 3a) = a^2(\tfrac{9}{2}l \,.\, 2),$$
$$\psi[(a), 3a] = a^2(6\ arc\ tang\ \tfrac{1}{3} + 18l \,.\, 3 - 9l \,.\, 10),$$
$$\psi[(2a), 3a] = a^2(12\ arc\ tang\ \tfrac{2}{3} + 18l \,.\, 3 - 9l \,.\, 13),$$
$$\psi[(3a), 3a] = a^2(\tfrac{9}{2}\pi - 9l \,.\, 2);$$

für die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich also folgende Werte:

$$6)\quad \begin{cases} p_1 = \frac{1}{9\pi} 2l \cdot 2, \\ p_2 = \frac{1}{9\pi}(10l \cdot 10 - 30l \cdot 2), \\ p_3 = \frac{1}{9\pi}(62l \cdot 2 + 72l \cdot 3 - 54l \cdot 10 + 36\, arc\, tang\, \frac{1}{3}), \\ p_4 = \frac{1}{9\pi}(62l \cdot 10 - 58l \cdot 2 - 72l \cdot 3 - 10l \cdot 13 + 48\,[arc\, tg\, \frac{2}{3} - arc\, tg\, \frac{1}{3}]), \\ p_5 = \frac{1}{9\pi}(24l \cdot 2 + 10l \cdot 13 - 18l \cdot 10 + 9\pi + 12\, arc\, tg\, \frac{1}{3} - 48\, arc\, tg\, \frac{2}{3}). \end{cases}$$

Ihre Summe ist, wie notwendig, die Einheit. Abgekürzte Werte dieser Wahrscheinlichkeiten sind:

$$p_1 = 0{,}049030, \quad p_2 = 0{,}078921, \quad p_3 = 0{,}329580,$$
$$p_4 = 0{,}374480, \quad p_5 = 0{,}167988.$$

74. Anmerkung. Elise Blackwood teilt im XVI. Bande der Educ. Tim., pag. 55 flg. die Resultate mit, welche sie auf dem Wege des Experimentes für dieses von ihr aufgestellte Problem erlangt hat. Die Versuche kamen in folgender Weise zur Ausführung. Auf einer kreisrunden Scheibe aus Kartenpapier wurde einerseits ein Durchmesser gezogen und durch den Mittelpunkt der anderen Seite eine Stecknadel gesteckt. Um diese, wie um einen Zapfen, wurde die Scheibe solange gedreht, bis die Reibung so weit überwunden war, dass ein leichter Impuls genügte, um die Scheibe in rasche Drehung zu bringen. Auf einem Papier war eine dem Fenster entsprechende Figur gezeichnet. Bei mit dem Kopfe abwärts gehaltener Nadel wurde die Scheibe in Rotation versetzt, während der Drehung auf dem Fenster ein Punkt beliebig bezeichnet, die Scheibe plötzlich aufgehalten und so auf das Fenster gelegt, dass der Stecknadelkopf möglichst genau mit dem bezeichneten Punkte zusammenfiel. Es wurde nun notiert, wie viele Tafeln der verlängert gedachte Durchmesser getroffen hat. Schien es, dass er durch einen Punkt geht, wo vier Scheiben zusammenstossen, so wurden an dieser Stelle nicht zwei, sondern drei Tafeln gezählt, weil es bei der unendlich gering zu denkenden Breite der Teilungslinien moralisch gewiss ist, dass die Linie nicht genau einen

solchen Punkt treffen werde. Schien die Linie durch einen Punkt am Rande des Fensters zu gehen, wo zwei Tafeln sich berühren, so blieb wirklich ein Zweifel übrig; ein solcher Versuch wurde daher bei jeder der zweifelhaften Anzahlen mit $\frac{1}{2}$ notiert.

Im ganzen sind 1150 Versuche ausgeführt worden mit folgendem Ergebnis. Es wurde getroffen:

eine Scheibe	58	mal,
zwei Scheiben	98	„
drei „	$391\frac{1}{2}$	„
vier „	405	„
fünf „	$197\frac{1}{2}$	„

Die mit diesen Zahlen gerechneten Erfahrungswahrscheinlichkeiten

0,050, 0,085, 0,340, 0,352, 0,173

stimmen mit den theoretischen Werten

0,049 ..., 0,079 ..., 0,330 ..., 0,374 ..., 0,168 ...,

im Hinblick auf die geringe Anzahl der Versuche überraschend gut (vergl. Nr. 72).

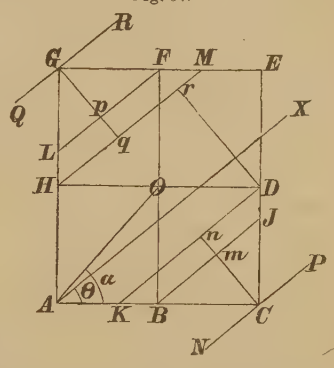
75. **Problem XVI.** *Über ein Fenster von vier gleichen rechteckigen Scheiben wird eine Gerade willkürlich gezogen. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die Gerade eine, resp. zwei, drei Scheiben kreuzt.*

Lösung. Der Unterschied zwischen diesem und dem Problem XIV, Nr. 71, besteht darin, dass dort nach Annahme des willkürlichen Punktes nur mehr die Richtung der Geraden willkürlich anzunehmen war, während hier Lage und Richtung unbestimmt und beliebig sind. Dennoch wurde das vorliegende, von Watson (Educ. Tim., Bd. XVI, pag. 32 flg.) aufgestellte Problem in dem zuerst angedeuteten Sinne aufgefasst und gelöst, so von M'Coll und J. W. Miller (l. c.), indem diese eine willkürlich gezogene Gerade als eine solche definieren, welche durch einen beliebigen Punkt in beliebiger Richtung gezogen wird.

Wir bezeichnen die verlangten Wahrscheinlichkeiten mit p_1, p_2, p_3.

Stellt $ACEG$ (Fig. 37) das Fenster vor, ist $AB = a$, $AH = b$, $AO = c$, AX eine aus A in beliebiger Richtung gezogene Gerade, welche mit AC den Winkel $CAX = \theta$ bildet, so führe man durch B, D, F, H, C, G die Parallelen BJ, DK, FL, HM, NP, QR zu AX. Sobald nun eine Gerade von der Richtung AX zwischen NP und BJ oder FL und QR fällt, kreuzt sie eine Scheibe; zwei Scheiben, wenn sie zwischen BJ und DK oder FL und HM zu liegen kommt; endlich drei Scheiben, wenn sie sich zwischen DK und HM befindet. Konstruiert man Cmn, Gpq, Dr rechtwinklig zu AX, so ergeben sich für die angeführten Ereignisse, solange θ kleiner ist als $CAO = \alpha$, die Wahrscheinlichkeiten

Fig. 37.



$$\frac{(Cm + Gp)\,d\theta}{N} = \frac{2a\,\sin\theta\,d\theta}{N},$$

$$\frac{(mn + pq)\,d\theta}{N} = \frac{2\,(b\,\cos\theta - a\,\sin\theta)\,d\theta}{N},$$

$$\frac{Dr\,.\,d\theta}{N} = \frac{2a\,\sin\theta\,d\theta}{N};$$

darin ist

$$N = \int_0^{\frac{2}{1}\pi} \{2a\,\sin\theta + 2\,(b\,\cos\theta - a\,\sin\theta) + 2a\,\sin\theta\}\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (a\,\sin\theta + b\,\cos\theta)\,d\theta = 2\,(a + b).$$

Wird $\theta > \alpha$, so vertauschen a und b ihre Rollen und an Stelle von θ tritt das Komplement; die Wahrscheinlichkeiten für dieses Wertgebiet von θ und eine bestimmte Richtung sind also

$$\frac{2b\,\cos\theta\,d\theta}{N}, \quad \frac{2\,(a\,\sin\theta - b\,\cos\theta)\,d\theta}{N}, \quad \frac{2b\,\cos\theta\,d\theta}{N}.$$

Demnach ist

$$1)\,\text{u.}\,3)\quad \begin{cases} p_1 = p_3 = \dfrac{1}{a+b}\left\{ a\int_0^{\alpha} \sin\theta\, d\theta + b\int_{\alpha}^{\frac{1}{2}\pi} \cos\theta\, d\theta \right\} \\ \quad = \dfrac{1}{a+b}\{a+b-(a\cos\alpha + b\sin\alpha)\} = 1 - \dfrac{c}{a+b}; \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} p_2 = \dfrac{1}{a+b}\left\{ \int_0^{\alpha} (b\cos\theta - a\sin\theta)\, d\theta + \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}\pi} (a\sin\theta - b\cos\theta)\, d\theta \right\} \\ \quad = \dfrac{1}{a+b}\{2(a\cos\alpha + b\sin\alpha) - (a+b)\} = \dfrac{2c}{a+b} - 1. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Formeln findet man beispielsweise

für $a = b \ldots$ $p_1 = p_3 = 0{,}29289$, $p_2 = 0{,}41421$,

„ $a = \frac{4}{3}b \ldots p_1 = p_3 = 0{,}28572$, $p_2 = 0{,}42875$,

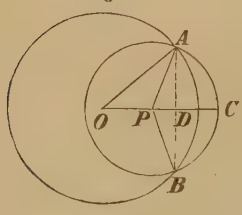
„ $a = 2b \ldots$ $p_1 = p_3 = 0{,}25464$, $p_2 = 0{,}49071$.

(Vergl. damit die Resultate in Nr. 71.)

76. **Problem XVII.** *Aus einem in der Fläche eines gegebenen Kreises willkürlich angenommenen Punkte wird ein Strahl von gegebener Länge in beliebiger Richtung gezogen. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass der Strahl den Umfang des Kreises schneidet.*

Lösung. Es sei O (Fig. 38) der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, r sein Halbmesser, a die gegebene Länge. Angenommen, der willkürlich bezeichnete Punkt falle in die Entfernung x von O, z. B. nach P — die betreffende Wahrscheinlichkeit ist $\dfrac{2\pi x\, dx}{\pi r^2} = \dfrac{2}{r^2} x\, dx$ —; man beschreibe aus P als Mittelpunkt mit der Länge a als Halbmesser einen Kreis, welcher den gegebenen in A, B schneidet. Der aus P geführte Strahl schneidet den Umfang des gegebenen Kreises nur dann, wenn er innerhalb des Winkels $APB = 2\angle APC$

Fig. 38.



fällt; die bezügliche Wahrscheinlichkeit ist $\frac{\angle APC}{\pi}$. Nun ist im Dreieck AOP

$$r^2 = x^2 + a^2 + 2ax\cos APC,$$

woraus

$$\angle APC = \arccos\frac{r^2 - a^2 - x^2}{2ax}$$

folgt. Die vollständige zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses ist also

$$p = \frac{2}{\pi r^2}\int_{r-a}^{r} x \arccos\frac{r^2 - a^2 - x^2}{2ax}\,dx.$$

Durch partielle Integration ergiebt sich zunächst

$$\int x\arccos\frac{r^2-a^2-x^2}{2ax}dx = \frac{x^2}{2}\arccos\frac{r^2-a^2-x^2}{2ax} - \frac{1}{2}\int\frac{r^2+x^2-a^2}{\sqrt{4a^2x^2-(r^2-a^2-x^2)^2}}x\,dx;$$

macht man unter dem Integralzeichen rechter Hand von der Identität

$$4a^2x^2 - (r^2 - a^2 - x^2)^2 = 4a^2r^2 - (r^2 + a^2 - x^2)^2$$

Gebrauch, so wird weiter

$$\int x\arccos\frac{r^2-a^2-x^2}{2ax}dx = \frac{x^2}{2}\arccos\frac{r^2-a^2-x^2}{2ax} + \frac{r^2}{2}\int\frac{-2x\,dx}{\sqrt{4a^2r^2-(r^2+a^2-x^2)^2}}$$
$$+\frac{1}{8}\int\frac{-2(r^2+a^2-x^2)\cdot-2x\,dx}{\sqrt{4a^2r^2-(r^2+a^2-x^2)^2}}$$
$$= \frac{x^2}{2}\arccos\frac{r^2-a^2-x^2}{2ax} - \frac{r^2}{2}\arccos\frac{r^2+a^2-x^2}{2ar} -$$
$$+\frac{1}{4}\sqrt{4a^2r^2-(r^2+a^2-x^2)^2}.$$

Nach Einführung der Grenzen erhält man endlich

$$p = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{a}{2r} + \frac{a\sqrt{4r^2-a^2}}{2\pi r^2}.$$

Die Ableitung wurde unter der Voraussetzung $a < r$ ausgeführt; für $a > r$ ergiebt sich nach ähnlicher Rechnung dasselbe Resultat.

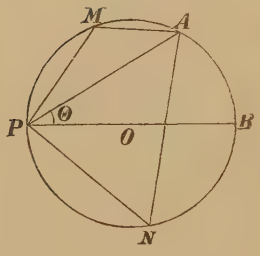
Für $a = 2r$ wird, wie es sein muss, $p = 1$, und für $a = r$

$$p = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}.$$

77. **Problem XVIII.** *In dem Umfange eines gegebenen Kreises werden zwei Punkte willkürlich angenommen und durch jeden derselben eine Gerade von beliebiger Richtung gezogen. Die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass diese Geraden innerhalb des Kreises sich schneiden.*

Lösung. Es sei O (Fig. 39) der Mittelpunkt des Kreises, P einer der beiden Punkte, POB der durch ihn geführte Durchmesser, PA die willkürlich gezogene Gerade. Ist Winkel $BPA = \theta$, so ist die Wahrscheinlichkeit der angenommenen Richtung von PA gleich $\frac{d\theta}{\pi}$.

Fig. 39.



Der zweite Punkt Q kann nun entweder auf den Bogen PMA oder $PNBA$ fallen, die bezügliche Wahrscheinlichkeit ist $\frac{\pi - 2\theta}{2\pi}$, resp. $\frac{\pi + 2\theta}{2\pi}$. Im ersten Falle ist Winkel $PMA = \frac{\pi + 2\theta}{2}$, im andern Falle Winkel $PNA = \frac{\pi - 2\theta}{2}$ ein Mass für die Anzahl der günstigen Richtungen der zweiten Geraden. Die vollständige zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses ist demnach

$$p = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\pi}\left\{\frac{\pi - 2\theta}{2\pi}\cdot\frac{\pi + 2\theta}{2\pi} + \frac{\pi + 2\theta}{2\pi}\cdot\frac{\pi - 2\theta}{2\pi}\right\}$$

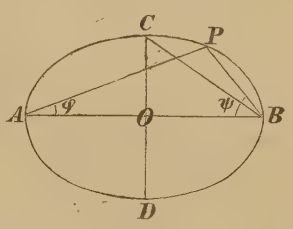
$$= \frac{1}{\pi^3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\pi^2 - 4\theta^2)\, d\theta = \frac{1}{3}.$$

78. **Problem XIX.** *Durch die Scheitel der grossen Axe einer gegebenen Ellipse werden zwei gerade Linien in beliebiger*

Richtung gezogen. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass sie sich innerhalb der Ellipse schneiden.

Lösung. Das Axenverhältnis der Ellipse sei $\frac{b}{a} = m$. Man ziehe durch A und B (Fig. 40) gerade Linien, welche sich in einem Punkte P der Ellipse schneiden, und bezeichne die Winkel PAB, PBA, die sie mit AB einschliessen, mit φ, ψ. Dann ist, wenn man die Mittelpunktskoordinaten des Punktes P mit x, y bezeichnet,

Fig. 40.



$$tang\,\varphi = \frac{y}{a+x}, \quad tang\,\psi = \frac{y}{a-x},$$

mithin

$$1) \qquad tang\,\varphi\, tang\,\psi = \frac{y^2}{a^2 - x^2} = \frac{b^2}{a^2} = m^2.$$

Zufolge der Symmetrie der Figur wird es genügen, die Wahrscheinlichkeit zu suchen, dass der Schnitt der durch A und B gezogenen Geraden in einem bestimmten Quadranten, z. B. OBC erfolgt, und diese zu vervierfachen.

Solange Winkel $PBA = \psi$ kleiner ist als Winkel $CBA = arc\,tang\,m$, wird BP von der durch A gezogenen Geraden in dem bezeichneten Quadranten geschnitten, solange der Neigungswinkel φ dieser Geraden kleiner ist als ψ.

Wird aber Winkel $PBA = \psi$ grösser als Winkel $CBA = arc\,tang\,m$, so erfolgt der Schnitt in dem bezeichneten Quadranten nur dann, wenn der Neigungswinkel φ der durch A geführten Geraden unter der durch Gleichung 1) bezeichneten Grenze, also $\varphi < arc\,tang\,(m^2\,cotg\,\psi)$ bleibt.

Demnach ist die verlangte Wahrscheinlichkeit:

$$2) \quad \begin{cases} p = 4\left\{\int_0^{arc\,tang\,m} \frac{d\psi}{\pi} \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\pi} + \int_{arc\,tang\,m}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\pi} \int_0^{arc\,tang\,(m^2\,cotg\,\psi)} \frac{d\varphi}{\pi}\right\} \\ = \frac{2}{\pi^2}\left\{(arc\,tang\,m)^2 + 2\int_{arc\,tang\,m}^{\frac{1}{2}\pi} arc\,tang\,(m^2\,cotg\,\psi)\,d\psi\right\}. \end{cases}$$

Die cyklometrische Funktion unter dem Integral in eine Reihe verwandelt, giebt

$$arctg(m^2 cotg\,\psi) = m^2 cotg\,\psi - \tfrac{1}{3} m^6 cotg^3\psi + \tfrac{1}{5} m^{10} cotg^5\psi - \tfrac{1}{7} m^{14} cotg^7\psi + \ldots;$$

beachtet man ferner die Identität

$$cotg^n\psi\, d\psi = cotg^{n-2}\psi\,(cosec^2\psi - 1)\,d\psi = -cotg^{n-2}\psi\, d(cotg\,\psi) - cotg^{n-2}\psi\, d\psi,$$

so wird

$$\int_{arctang\, m}^{\frac{1}{2}\pi} arctang\,(m^2 cotg\,\psi)\, d\psi$$

$$= m^2\left\{-l\left(\frac{m^2}{1+m^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}m^4 - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}m^6 + \ldots\right\}$$

$$- \frac{1}{3}m^6 l\cdot\left(\frac{m^2}{1+m^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{5}m^{10}\left[\frac{1}{2m^2} + l\cdot\left(\frac{m^2}{1+m^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$+ \frac{1}{7}m^{14}\left[\frac{1}{4m^4} - \frac{1}{2m^2} - l\cdot\left(\frac{m^2}{1+m^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \ldots$$

und

$$2\int_{arctang\, m}^{\frac{1}{2}\pi} arctang\,(m^2 cotg\,\psi)\, d\psi$$

$$= m^2\left(1 + \frac{1}{3}m^4 + \frac{1}{5}m^8 + \frac{1}{7}m^{12} + \ldots\right) l\cdot\frac{1+m^2}{m^2} - \frac{1}{3}m^4 + \frac{1}{5}m^6\left(\frac{1}{2} - m^2\right)$$

$$- \frac{1}{7}m^8\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}m^2 + m^4\right) + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} l\cdot\frac{1+m^2}{1-m^2} l\cdot\frac{1+m^2}{m^2} - \frac{1}{3}m^4 + \frac{1}{5}m^6\left(\frac{1}{2} - m^2\right) - \frac{1}{7}m^8\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}m^2 + m^4\right) + \ldots$$

Durch Einführung dieses Ausdruckes in Gleichung 2) erhält man schliesslich

$$3)\quad \left\{ p = \frac{2}{\pi^2}\left\{(arctg\, m)^2 + \frac{1}{2} l\cdot\frac{1+m^2}{1-m^2} l\cdot\frac{1+m^2}{m^2} - \frac{1}{3}m^4 + \frac{1}{5}m^6\left(\frac{1}{2} - m^2\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{7}m^8\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}m^2 + m^4\right) + \ldots\right\}.\right.$$

Für den Kreis, wo $m = 1$ ist, schreibt sich Gleichung 2) einfacher

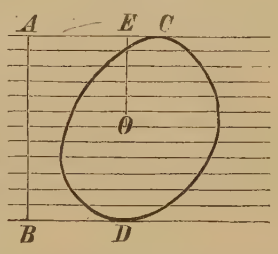
$$4) \qquad p = \frac{2}{\pi^2}\left\{\frac{\pi^2}{16} + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) d\psi\right\} = \frac{1}{4}.$$

Für kleine Werte von m konvergiert die für p entwickelte Reihe sehr rasch.

79. **Theorem III.** *Die Anzahl aller willkürlichen Geraden, welche eine ebene, geschlossene, konvexe Kurve schneiden, wird durch die Länge der Kurve gemessen.*

Beweis. Wir denken uns eines der Parallelensysteme, aus welchen die in Rede stehende Gesamtheit von Geraden zusammengesetzt ist (s. Nr. 55), herausgehoben; dasselbe möge mit einer festen Richtung den Winkel θ einschliessen. Die Anzahl der Geraden dieses Systems wird durch den senkrechten Abstand der Grenzlinien AC und BD (Fig. 41), d. i. durch $AB = b$ gemessen. Die Anzahl der Geraden jener Systeme, welche mit der festen Richtung Winkel zwischen θ und $\theta + d\theta$ bilden, ist daher durch $b\,d\theta$ und die Anzahl aller Geraden, welche die Kurve schneiden, durch

Fig. 41.



$$1) \qquad \int_0^{\pi} b\,d\theta = L$$

ausgedrückt, wobei L die Länge der Kurve bedeutet.

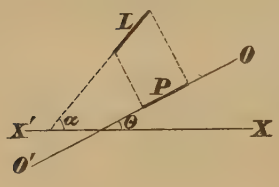
Anmerkung I. Der hier benutzte Satz ist ein besonderer Fall des allgemeinen Satzes über die Rektifikation ebener Kurven, welchen Cauchy im XIII. Bande der Comptes rendus (1841, Juli/Dezember, pag. 1060 sq.) ohne Beweis angezeigt hat. Dieser lautet: „Bezeichnet θ den Winkel, welchen eine in einer Ebene beliebig gezogene Gerade OO' mit einer festen Axe XX' bildet; L die Summe einer oder mehrerer Längen, gemessen in einer oder mehreren geraden oder krummen, geschlossenen oder nicht geschlossenen Linien;

P die Summe der absoluten Werte der Projektionen der einzelnen Elemente von L auf OO', so ist

$$L = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} P\,d\theta.“$$

Zum Zwecke des Beweises genügt es, eine einzige in einer Geraden gemessene Länge L (Fig. 42) zu betrachten, welche mit der festen Axe XX' den Winkel α bildet; ihre Projektion — oder die Summe der absoluten Werte der Projektionen ihrer Elemente — auf OO' ist

Fig. 42.



$$P = L\cos(\alpha - \theta),$$

somit

$$\int P\,d\theta = L\int \cos(\alpha - \theta)\,d\theta.$$

Integriert man beiderseits zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$, jedoch für absolute Werte von P, rechts also für absolute Werte von $\cos(\alpha - \theta)$, so wird

$$\int_{-\pi}^{\pi} P\,d\theta = L \,.\, 4\int_{\alpha}^{\alpha+\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha - \theta)\,d\theta = 4L,$$

woraus thatsächlich folgt

$$L = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} P\,d\theta.$$

Die Ausdehnung des Satzes auf eine beliebige Kurve bedarf keiner weiteren Erklärung.

Ist die Kurve insbesondere geschlossen und konvex (Fig. 43, S. 115), so ist P oder die Summe der absoluten Werte der Projektionen aller Elemente gleich der doppelten Projektion $AB = b$ der ganzen Kurve auf OO' oder der doppelten, in Richtung von OO' gemessenen Breite der Kurve. Man hat daher

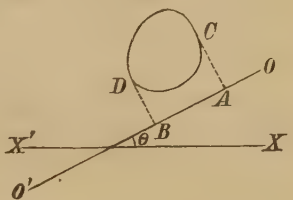
$$L = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} b\, d\theta,$$

und da bei der durch die Integrationsgrenzen vorgezeichneten Drehung von OO' alle Werte von b zweimal und alle Werte überhaupt zwischen 0 und π auftreten, so ist auch

$$L = \int_{0}^{\pi} b\, d\theta,$$

womit der oben benutzte Satz erwiesen ist.

Fig. 43.



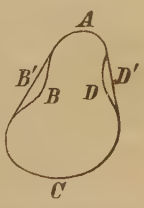
Anmerkung II. Führt man aus einem innerhalb der Kurve gewählten festen Punkte O (Fig. 41) ein Perpendikel $OE = p$ zur Tangente AC, so kann für 1) auch geschrieben werden

$$2) \qquad \int_{0}^{2\pi} p\, d\theta = L.$$

80. **Theorem IV.** *Die Anzahl aller Geraden, welche eine nicht konvexe geschlossene Kurve schneiden, wird durch die Länge des diese Kurve fest umspannenden Fadens gemessen.*

Beweis. Denn alle Geraden, welche die konvexe, $ABCD$ (Fig. 44) fest umschliessende Kurve $AB'CD'$ schneiden, treffen auch die nicht konvexe Kurve $ABCD$, und ausser diesen giebt es keine weitere Gerade, welche $ABCD$ schneidet.

Fig. 44.



81. **Problem XX.** *Eine konvexe, geschlossene Kurve von der Länge* L *schliesst eine zweite derartige Kurve von der Länge* l *ein. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass eine Gerade, welche* L *schneidet, auch* l *treffen wird.*

Lösung. Ohne weitere Erklärung ergiebt sich

$$p = \frac{l}{L},$$

die verlangte Wahrscheinlichkeit ist also von der sonstigen relativen Lage der beiden Kurven unabhängig.

Anmerkung. Hierauf könnte eine experimentelle Rektifikation einer konvexen geschlossenen Kurve gegründet werden. (Vergl. die Bemerkung, mit welcher Laplace das Nadelproblem einleitet. Théor. anal. d. probab., pag. 359.) Man umschliesse die zu rektificierende Kurve mit einer anderen konvexen geschlossenen Linie (Kreis, Polygon) von bekannter Länge L, ziehe in der Ebene beider Kurven eine grosse Anzahl s willkürlicher Geraden, welche L schneiden, und zähle diejenigen, welche auch die Linie von unbekannter Länge l treffen; ihre Anzahl sei m. Je grösser s, um so genauer wird die Gleichung

$$\frac{m}{s} = \frac{l}{L}$$

zutreffen, aus welcher $l = \frac{m}{s} L$ folgt.

82. **Problem XXI.** *Eine Scheibe mit konvexem Umriss von sonst beliebiger Form wird auf eine Ebene geworfen, die mit einer Schar äquidistanter Parallelen überzogen ist. Vorausgesetzt, dass die Scheibe in keiner Lage mehrere Teilungslinien zugleich treffen kann, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass die Scheibe mit einer Teilungslinie zusammentrifft.*

Lösung. Das vorliegende Problem lässt auch folgende Auffassung zu. Die Scheibe, deren Umrisskurve die Länge l hat, ist von einem Kreise L umschlossen, dessen Durchmesser gleich ist dem gegenseitigen Abstande a der Teilungslinien. Nun wird eine Gerade willkürlich gezogen, welche den Kreis schneidet; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie auch die Kurve l trifft? Dem vorangehenden Problem zufolge ist

$$p = \frac{l}{L} = \frac{l}{\pi a}.$$

Der einfachste Fall von Buffons Nadelproblem (s. Nr. 64) kann als besonderer Fall des vorliegenden aufgefasst werden, indem man die Nadel als Grenze einer elliptischen Scheibe mit verschwindender Nebenaxe und einer Hauptaxe voraussetzt, deren Länge $2r$ kürzer ist als der Abstand a der Parallelen. Alsdann ist $l = 4r$ und

$$p = \frac{4r}{\pi a}.$$

Anmerkung. Im obigen liegt die allgemeine Lösung des von den Franzosen „jeu du joint couvert“ genannten Glücksspiels. Der Boden eines Zimmers ist durch parallele Fugen in Streifen von gleicher Breite zerlegt; eine Münze wird auf denselben geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft sie eine der Fugen, vorausgesetzt, dass sie mehrere auf einmal nie treffen kann?

In Liouvilles Journal (1860, pag. 273 sq.) teilt E. Barbier mit, Lamé habe in seinen Vorlesungen an der Faculté des Sciences 1860 im Anschlusse an das Nadelproblem den allgemeineren Fall behandelt, dass statt einer Nadel eine Scheibe geworfen werde, deren Grundfläche ein Kreis, eine Ellipse, ein reguläres Polygon ist. Aus dem Umstande, dass sich in allen diesen drei Fällen als schliessliches Resultat der Ausdruck $\frac{l}{\pi a}$ ergeben hat, schliesst Barbier, dieselben müssten Spezialfälle eines allgemeinen Theorems sein. Barbier stellt dieses Theorem, welches in der Lösung des vorliegenden Problems seinen Ausdruck findet, auf und kleidet es dann zum Zwecke der Begründung in die Form eines Glücksspieles. Er findet zunächst nur, dass die Wahrscheinlichkeit, die Scheibe werde eine Fuge treffen, von der Länge ihres Umfanges abhängt, und deutet dann den Weg an, auf welchem man zu dem Ausdrucke $\frac{l}{\pi a}$ gelangen kann.

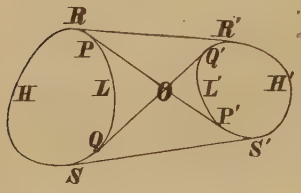
83. **Theorem V.** *Die Anzahl aller willkürlichen Geraden, welche zwei geschlossene konvexe Kurven, die sich gegenseitig ausschliessen, zugleich schneiden, wird durch die Differenz der Längen zweier sie umspannender endloser Saiten gemessen; die erste kreuzt sich zwischen den Kurven, die andere ist offen.*

Beweis. In Fig. 45 (S. 118) sind PQH, $P'Q'H'$ die beiden Kurven; die sich kreuzende Saite besteht aus den Bögen PHQ, $P'H'Q'$ und den inneren gemeinschaftlichen Tangenten PP', QQ', ihre Länge heisse X; die offene Saite setzt sich aus den Bögen RHS, $R'H'S'$ und den äusseren gemeinsamen Tangenten RR', SS' zusammen, ihre Länge sei Y.

Wir wollen uns im folgenden zur Bezeichnung der Anzahl aller Geraden, welche eine Kurve C treffen, des

Symbols $N(C)$, und zur Bezeichnung der Anzahl aller Geraden, welche zwei Kurven C, C' zugleich schneiden, des Symbols $N(C, C')$ bedienen. In dieser Bezeichnungsweise schreibt sich der zu erweisende Satz in der Form

Fig. 45.



$$N(PQH, P'Q'H') = X - Y.$$

Die in Rede stehende Gesamtheit von Geraden ist offenbar identisch mit der Gesamtheit jener Geraden, welche die beiden gemischtlinigen geschlossenen Figuren $OPHQ$ und $OP'H'Q'$ zugleich schneiden; denn jede Gerade, welche diese beiden trifft, schneidet auch die beiden gegebenen Kurven, und es ist keine Gerade denkbar, welche die letzteren treffen würde, ohne zugleich die beiden ersteren zu schneiden. Es ist also

$$1) \quad N(PQH, P'Q'H') = N(OPHQ, OP'H'Q').$$

In der Summe $N(OPHQ) + N(OP'H'Q')$ ist ausser der Gesamtheit jener Geraden, welche die verschlungene Figur $PP'H'Q'QH$ schneiden, noch die Gesamtheit derjenigen Geraden enthalten, welche $OPHQ$ und $OP'H'Q'$ zugleich schneiden. Denn diese letztere kommt in der genannten Summe zweimal, weil in jedem Summanden einmal, vor, in $N(PP'H'Q'QH)$ aber kommt sie nur einmal vor, muss also, um die Gleichheit herzustellen, einmal hinzugefügt werden; es ist demnach

$$N(OPHQ) + N(OP'H'Q') = N(PP'H'Q'QH) + N(OPHQ, OP'H'Q')$$

oder im Hinblick auf 1)

$$2) \quad N(OPHQ) + N(OP'H'Q') = N(PP'H'Q'QH) + N(PQH, P'Q'H').$$

$OPHQ$, $OP'H'Q'$ sind konvexe Linien, die Summe ihrer Längen ist X. Dagegen ist $PP'H'Q'QH$ eine teilweise konkave Kurve, die Anzahl der Geraden, welche sie schneiden, wird durch die Länge der sie umspannenden konvexen Saite gemessen; diese ist aber $RHSS'H'R'R$ und ihre Länge Y. Setzt man diese Werte in 2) ein, so wird

$$X = Y + N(PQH, P'Q'H');$$

woraus thatsächlich

3) $$N(PQH, P'Q'H') = X - Y$$

folgt.

84. **Problem XXII.** *Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass eine beliebige Gerade, welche eine geschlossene konvexe Kurve von der Länge* L *schneidet, auch eine zweite in derselben Ebene liegende Kurve von eben solcher Beschaffenheit trifft, wenn beide Kurven gegenseitig sich ausschliessen.*

Lösung. Zufolge des obigen Satzes und mit den dort gebrauchten Bezeichnungen ist

$$p = \frac{X - Y}{L}.$$

Anmerkung. Reduziert sich die zweite Kurve auf einen Punkt, so wird $X = Y$ und $p = 0$, d. h. es ist moralisch unmöglich, dass eine beliebige Gerade, welche die Kurve L schneidet, auch durch den gegebenen Punkt geht, oder anders gesprochen, die Gesamtheit der Geraden, welche die Kurve L schneidend durch den gegebenen Punkt gehen, ist ein unendlich kleiner Bruchteil von der Gesamtheit aller Geraden, welche L schneiden.

Wird jedoch umgekehrt nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass eine durch den Punkt beliebig gezogene Gerade die Kurve L schneidet, so lautet die Antwort:

$$p = \frac{\theta}{\pi},$$

wobei θ den Winkel bezeichnet, unter welchem die Kurve aus dem Punkte erscheint.

85. **Problem XXIII.** *Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass eine Gerade, welche eine Seite eines gegebenen Quadrates schneidet, auch die gegenüberliegende Seite trifft.*

Lösung. Das vorliegende Problem kann als ein besonderer Fall des vorangehenden angesehen werden, indem man jede der beiden in Betracht gezogenen Quadratseiten als eine geschlossene Kurve von der Länge $2a$ ansieht, wenn a die Seite des Quadrates ist. Es ist dann

$$X = 2a + 2a\sqrt{2}, \quad Y = 4a, \quad L = 2a,$$

daher

$$p = \sqrt{2} - 1.$$

86. **Problem XXIV.** *Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass eine Gerade, welche eine geschlossene konvexe Kurve von der Länge* L *schneidet, gleichzeitig eine sie berührende Kurve von eben solcher Beschaffenheit und der Länge* L' *treffen wird.*

Lösung. In diesem besonderen Falle von Nr. 84 ist $X = L + L'$, folglich

$$p = \frac{L + L' - Y}{L}.$$

Sind beispielsweise die beiden Kurven Kreise von demselben Halbmesser $= 1$, so ist

$$p = \frac{2\pi + 2\pi - (2\pi + 4)}{2\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

87. **Problem XXV.** *Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass eine Gerade, welche eine Seite eines gegebenen Quadrates schneidet, gleichzeitig eine (näher bezeichnete) von den beiden anstossenden Seiten treffen wird.*

Lösung. Die beiden anstossenden Seiten können als zwei sich berührende konvexe Kurven, jede von der Länge $2a$, wenn a die Quadratseite ist, gelten, und in diesem Sinne ist

$$L = L' = 2a, \quad Y = 2a + a\sqrt{2},$$

daher

$$p = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

88. **Problem XXVI.** *Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass eine Gerade, welche eine geschlossene konvexe Kurve von der Länge* L *schneidet, auch eine zweite, die erste schneidende Kurve von derselben Beschaffenheit und der Länge* L' *treffen wird.*

Lösung. 1. Die Kurven schneiden sich in zwei Punkten (Fig. 46, S. 121). In der Summe $N(L) + N(L')$ sind jene Geraden enthalten, welche die teilweise konkave Figur $ARHBH'A$ schneiden; unter diesen kommen jene Geraden, welche L und L' zugleich treffen, nur einmal vor, während

sie in der genannten Summe zweimal, weil in jedem Summanden, gezählt erscheinen. Daher die Gleichung

$$N(L) + N(L') = N(ARHBH'A) + N(L, L');$$

die erste Anzahl rechts bezieht sich auf eine konkave Figur, welche mit der sie umspannenden Saite $RHSS'H'R'R$ von der Länge Y zu vertauschen ist. Mit dieser Bemerkung schreibt sich obige Gleichung

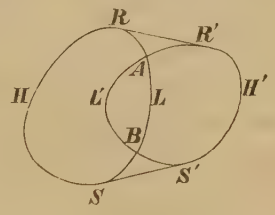
$$L + L' = Y + N(L, L'),$$

woraus

$$N(L, L') = L + L' - Y$$

folgt.

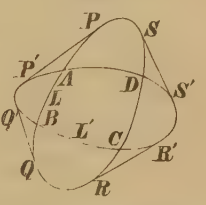
Fig. 46.



2. Die Kurven schneiden sich in vier Punkten (Fig. 47). In der Summe $N(L) + N(L')$ sind alle Linien gezählt, welche die konkave Figur $AP'BQCR'DSA$ schneiden, darunter jene zweimal, welche L und L' gleichzeitig treffen; die konkave Figur ist wieder durch die sie umspannende Saite $PP'Q'QRR'S'S$ von der Länge Y zu ersetzen. Die Schlussfolge ist dieselbe wie vorhin, daher auch das Resultat

$$N(L, L') = L + L' - Y.$$

Fig. 47.



Die verlangte Wahrscheinlichkeit ist also in beiden Fällen

$$p = \frac{L + L' - Y}{L}.$$

89. **Problem XXVII.** *Eine willkürlich gezogene Gerade schneidet eine Diagonale eines gegebenen Quadrates; es ist die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass sie auch die andere Diagonale innerhalb des Quadrates trifft.*

Lösung. Die beiden Diagonalen können als zwei konvexe geschlossene Kurven, die in vier Punkten sich schneiden, angesehen werden, deren jede die Länge $2a\sqrt{2}$ besitzt, wenn a die Seite des Quadrates bedeutet. Im Sinne des vorigen Problems ist dann

$$L = L' = 2a\sqrt{2}, \quad Y = 4a,$$

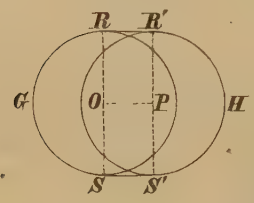
daher

$$p = 2 - \sqrt{2}.$$

90. **Problem XXVIII.** *Innerhalb eines gegebenen Kreises vom Halbmesser* r *wird ein Punkt willkürlich angenommen; es ist die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass eine beliebig gezogene Sekante des Kreises an dem Punkte in einer Entfernung kleiner als* r *vorbeigeht.*

Lösung. Es sei O (Fig. 48) der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, P der willkürlich bezeichnete Punkt; wenn $OP = \varrho$, so ist die Wahrscheinlichkeit der bezeichneten Lage von P

Fig. 48.



$$\frac{2\pi\varrho\, d\varrho}{\pi r^2} = \frac{2}{r^2}\varrho\, d\varrho.$$

Wird nun aus P als Mittelpunkt mit dem Halbmesser r ein Kreis beschrieben, so erkennt man, dass eine beliebig gezogene Sekante des gegebenen Kreises der Bedingung der Aufgabe nur dann genügt, wenn sie zugleich diesen zweiten Kreis schneidet. Die bezügliche Wahrscheinlichkeit ist nach der Endformel von Nr. 88 zu rechnen, und zwar ist im vorliegenden Falle

$$L = L' = 2\pi r, \quad Y = 2\pi r + 2\varrho,$$

daher

$$p = \frac{\pi r - \varrho}{\pi r}.$$

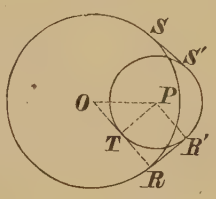
Demnach ist die vollständige zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses

$$\Pi = \int_0^r \frac{2}{r^2}\varrho\, d\varrho \cdot \frac{\pi r - \varrho}{\pi r} = \frac{2}{\pi r^3}\int_0^r (\pi r - \varrho)\varrho\, d\varrho = 1 - \frac{2}{3\pi}.$$

91. **Problem XXIX.** *Innerhalb eines gegebenen Kreises vom Halbmesser* r *wird ein Punkt beliebig angenommen; es soll die Wahrscheinlichkeit ermittelt werden, dass eine willkürlich gezogene Sekante des Kreises von dem Punkte eine Entfernung kleiner als* e *besitzt.*

Lösung. Wie im vorigen Falle sei O (Fig. 49) der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, P der willkürlich angenommene Punkt.

Fig. 49.



Zunächst sei $OP = \varrho > r - e$; dann schneidet der aus P mit dem Halbmesser e beschriebene Kreis den gegebenen, die Verhältnisse liegen ähnlich wie in Nr. 90, und zwar ist mit den dort gewählten Bezeichnungen

$$L = 2\pi r, \quad L' = 2\pi e,$$

$$Y = 2\pi r - 2r \arccos\frac{r-e}{\varrho} + 2e \arccos\frac{r-e}{\varrho} + 2\sqrt{\varrho^2 - (r-e)^2};$$

die auf diesen Fall bezügliche Wahrscheinlichkeit ist also

$$\Pi_1 = \int_{r-e}^{r} \frac{2}{r^2}\varrho\, d\varrho \cdot \frac{\pi e + (r-e)\arccos\frac{r-e}{\varrho} - \sqrt{\varrho^2-(r-e)^2}}{\pi r}$$

$$= \frac{2}{\pi r^3}\int_{r-e}^{r}\left(\pi e + (r-e)\arccos\frac{r-e}{\varrho} - \sqrt{\varrho^2-(r-e)^2}\right)\varrho\, d\varrho.$$

Nun ist

$$\int_{r-e}^{r} \pi e\,\varrho\, d\varrho = \frac{1}{2}\pi e\{r^2 - (r-e)^2\};$$

setzt man im zweiten Gliede $\frac{r-e}{\varrho} = u$, so wird

$$\int_{r-e}^{r} \arccos\frac{r-e}{\varrho}\,\varrho\, d\varrho = -(r-e)^2 \int_{1}^{\frac{r-e}{r}} u^{-3}\arccos u\, du,$$

und durch partielle Integration

$$(r-e)\int_{r-e}^{r}\arccos\frac{r-e}{\varrho}\,\varrho\, d\varrho = \frac{r^2(r-e)}{2}\arccos\frac{r-e}{r} - \frac{(r-e)^2}{2}\sqrt{r^2-(r-e)^2};$$

endlich ist

$$\int_{r-e}^{r}\sqrt{\varrho^2-(r-e)^2}\,\varrho\, d\varrho = \frac{1}{3}\sqrt{\{r^2-(r-e)^2\}^3}.$$

Demnach hat man schliesslich

$$1)\quad \left\{ \Pi_1 = \frac{2}{\pi r^3}\left\{ \frac{1}{2}\pi e[r^2-(r-e)^2] + \frac{r^2(r-e)}{2}\arccos\frac{r-e}{r} - \frac{(r-e)^2}{2}\sqrt{r^2-(r-e)^2} - \frac{1}{3}\sqrt{[r^2-(r-e)^2]^3}\right\}.\right.$$

Es bleibt noch die Wahrscheinlichkeit für den Fall zu berechnen, dass $OP = \varrho < r - e$ ist. Der aus P als Mittelpunkt mit dem Halbmesser e beschriebene Kreis wird dann von dem gegebenen eingeschlossen, und jede Gerade, welche ihn schneidet, genügt den Bedingungen der Aufgabe. Die bezügliche Wahrscheinlichkeit ist also (vergl. Nr. 81)

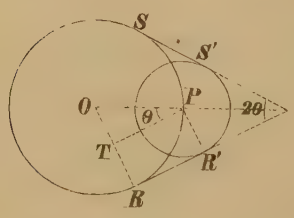
$$2)\qquad \Pi_2 = \frac{\pi(r-e)^2}{\pi r^2}\cdot\frac{2\pi e}{2\pi r} = \frac{\pi e(r-e)^2}{\pi r^3}.$$

Die Summe aus den Wahrscheinlichkeiten 1) und 2) giebt die vollständige Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses,

$$3)\quad \left\{ \begin{aligned} \Pi &= \frac{2}{\pi r^3}\left\{ \frac{1}{2}\pi e r^2 + \frac{r^2(r-e)}{2}\arccos\frac{r-e}{r} - \frac{(r-e)^2}{2}\sqrt{r^2-(r-e)^2} - \frac{1}{3}\sqrt{[r^2-(r-e)^2]^3}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi r}\left\{ 2\pi e + 2(r-e)\arccos\frac{r-e}{r} - 2r\left(\frac{r-e}{r}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{r-e}{r}\right)^2} - \frac{4r}{3}\sqrt{\left[1-\left(\frac{r-e}{r}\right)^2\right]^3}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Das Resultat nimmt eine elegantere und kompendiöse Form an, wenn man die besondere Lage des Punktes P (Fig. 50) zu Hilfe nimmt. Die die beiden Kreise umspannende Saite hat dann die Länge

Fig. 50.



$$Y_0 = 2\pi r - 2r\arccos\frac{r-e}{r} + 2e\arccos\frac{r-e}{r} + 2\sqrt{r^2-(r-e)^2},$$

ihr Überschuss über die beiden Kreisumfänge ist:

$$2\pi r + 2\pi e - Y_0 = 2\pi e + 2(r-e)\arccos\frac{r-e}{r} - 2\sqrt{r^2-(r-e)^2};$$

mithin kann Π in folgender Form dargestellt werden:

$$\Pi = \frac{1}{2\pi r}\left\{2\pi r + 2\pi e - Y_0 + 2r\sqrt{1-\left(\frac{r-e}{r}\right)^2} - 2r\left(\frac{r-e}{r}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{r-e}{r}\right)^2} - \frac{4r}{3}\sqrt{\left[1-\left(\frac{r-e}{r}\right)^2\right]^3}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\left\{2\pi r + 2\pi e - Y_0 + \frac{2r}{3}\sqrt{\left[1-\left(\frac{r-e}{r}\right)^2\right]^3}\right\},$$

und wenn man endlich den Winkel 2θ einführt, den die beiden geraden Teile des endlosen Bandes einschliessen, so ist

$$\Pi = \frac{2\pi r + 2\pi e - Y_0}{2\pi r} + \frac{\cos^3\theta}{3\pi}.$$

Der erste Teil der rechten Seite stellt die Wahrscheinlichkeit unter der Bedingung vor, dass der willkürlich angenommene Punkt auf den Umfang des gegebenen Kreises fällt; bezeichnet man diese mit Π_0, so ist also

4) $$\Pi = \Pi_0 + \frac{\cos^3\theta}{3\pi}.$$

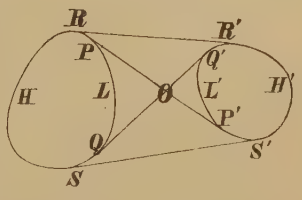
Anmerkung. Der besondere in Nr. 90 behandelte Fall wird aus dem gegenwärtigen abgeleitet, indem man $r = e$ und gleichzeitig $\theta = 0$ setzt; in der That ergiebt sich dann wieder

$$\Pi = 1 - \frac{2}{3\pi}.$$

92. **Theorem VI.** *Die Anzahl willkürlicher Geraden, welche zwischen zwei geschlossenen konvexen, gegenseitig sich ausschliessenden Kurven gezogen werden können, ohne eine davon zu schneiden, wird durch* X — L — L′ *gemessen, wenn* X, L, L′ *die früher* eingeführten Bedeutungen haben.*

Beweis. Die Gesamtheit der Geraden, welche die konvexe Figur $RHSS'H'\hat{R}'R$ (Fig. 51) von der Länge Y schneiden, setzt sich zusammen aus den Geraden, welche L, aus jenen, welche L' schneiden, und aus jenen, die zwischen beiden Kurven hindurchlaufen; die Anzahl der letzteren sei N. Dabei sind aber die Geraden, welche L und L' zugleich

Fig. 51.



* Siehe Nr. 83.

treffen und deren Anzahl nach Nr. 83 gleichkommt $X - Y$, zweimal gezählt, nämlich sowohl unter den Geraden, welche L treffen, als auch unter jenen, welche L' schneiden, müssen also, um die Gleichheit herzustellen, einmal in Abzug gebracht werden. Dieses Raisonnement führt zu der Gleichung

$$Y = L + L' + N - X + Y,$$

aus welcher, wie behauptet worden,

1) $$N = X - L - L'$$

folgt.

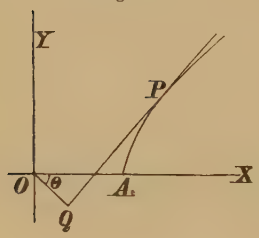
Beachtet man, dass $X = PP' + QQ' + L - arc\,PQ + L' - arc\,P'Q'$, so kann auch geschrieben werden:

2) $$N = PP' + QQ' - arc\,PQ - arc\,P'Q'.$$

93. Anmerkung. Der Formel 2) zufolge wird also die Gesamtheit der Geraden, welche zwischen den beiden Ästen einer Hyperbel hindurchgehen, durch die Differenz zwischen den Asymptoten und den Hyperbelästen gemessen, welche Differenz bekanntlich einen endlichen Wert hat.

Es sei AP (Fig. 52) ein Zweig der Hyperbel, O der Mittelpunkt, PQ eine Tangente, OQ rechtwinklig zu PQ; ferner bedeute $a = OA$ die reelle Halbaxe, e die relative Excentrizität. Setzt man $OQ = p$, $PQ = u$, Winkel $XOQ = \theta$, so können p, u als neue rechtwinklige Koordinaten des Hyperbelpunktes P angesehen werden, bezogen auf ein mit dem ursprünglichen konzentrisches, gegen dasselbe um den Winkel θ gedrehtes Koordinatensystem; demnach ist

Fig. 52.



$$p = x\cos\theta - y\sin\theta,$$
$$u = x\sin\theta + y\cos\theta;$$

ferner

1) $$\frac{dp}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\cdot\cos\theta - \frac{dy}{d\theta}\sin\theta - x\sin\theta - y\cos\theta = -u,$$

2) $$\frac{d^2p}{d\theta^2} = -\frac{du}{d\theta} = -\frac{dx}{d\theta}\sin\theta - \frac{dy}{d\theta}\cos\theta - x\cos\theta + y\sin\theta = -\frac{ds}{d\theta} - p;$$

denn aus den Beziehungen

$$\frac{dy}{dx} = cotg\,\theta \quad \text{und} \quad \frac{ds}{dx} = cosec\,\theta$$

folgt

$$\frac{dx}{d\theta}\cos\theta - \frac{dy}{d\theta}\sin\theta = \frac{dx}{d\theta}\cos\theta - \frac{dx}{d\theta}cotg\,\theta\sin\theta = 0,$$

und

$$\frac{dx}{d\theta}\sin\theta + \frac{dy}{d\theta}\cos\theta = \frac{dx}{d\theta}\sin\theta + \frac{dx}{d\theta}cotg\,\theta\cos\theta = \frac{dx}{d\theta}cosec\,\theta = \frac{ds}{d\theta}.$$

Integriert man Gleichung 2) innerhalb der Grenzen 0 und θ, so ergiebt sich, wenn man Bogen AP mit s bezeichnet:

$$\frac{dp}{d\theta} = -s - \int_0^\theta p\,d\theta,$$

und im Hinblick auf 1)

$$u - s = \int_0^\theta p\,d\theta.$$

Das Integral rechter Hand drückt also die Differenz zwischen QP und dem Hyperbelbogen AP aus. Lässt man den Punkt P ins unendliche rücken, also θ bis zu dem Werte $\alpha = arc\sin\frac{1}{e}$ fortschreiten, so erhält man die Differenz aus einem ganzen Hyperbelzweige und der zugehörigen halben Asymptote; wird p durch den bekannten Ausdruck $a\sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}$ ersetzt, so kommt besagte Differenz gleich dem Integral

$$a\int_0^\alpha \sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}\,d\theta,$$

und daher die Differenz aus der ganzen Hyperbel und den Asymptoten

$$3) \qquad \Delta = 4a\int_0^\alpha \sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}\,d\theta.$$

Durch die Substitutionen

$$e\sin\theta = \sin\varphi, \qquad \frac{1}{e} = \varkappa$$

wird

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{1 - e^2 \sin^2\theta}\, d\theta = \varkappa \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} = \frac{E - (1 - \varkappa^2) F}{\varkappa},$$

und wenn man für die vollständigen elliptischen Integrale E, F die bekannten Entwickelungen einsetzt, schliesslich

$$4) \quad \Delta = 2\pi a \left\{ \frac{\varkappa}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\varkappa^3}{4} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{\varkappa^5}{6} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{\varkappa^7}{8} + \cdots \right\}.$$

94. **Problem XXX.** *Eine geschlossene konvexe Kurve von der Länge* L *schliesst zwei ebenso gestaltete Kurven ein, welch' letztere sich gegenseitig ausschliessen und die Längen* l, l' *besitzen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine willkürlich gezogene Gerade, welche* L *schneidet, zwischen* l *und* l' *hindurchgeht?*

Lösung. Bezeichnet x die Länge der schleifenförmig um l und l' gespannten Saite, so ist auf Grund des Satzes in Nr. 92

$$p = \frac{x - l - l'}{L}.$$

Anmerkung. Wenn die beiden, innerhalb L angeordneten Kurven auf zwei Punkte sich reduzieren, deren Abstand e ist, so wird

$$l = l' = 0, \quad x = 2e,$$

daher

$$p = \frac{2e}{L},$$

wie dies auch nach Nr. 81 sich ergeben hätte.

95. **Problem XXXI.** *Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass eine willkürlich gezogene Gerade, die einen gegebenen Kreis schneidet, auch einen gegebenen Durchmesser desselben trifft?*

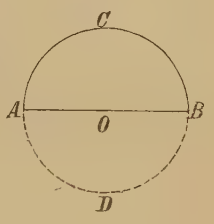
Lösung. Auf diese Aufgabe passt der in der Anmerkung zu Nr. 94 angeführte Fall. Die Gerade schneidet nämlich den Durchmesser AB, wenn sie zwischen den Punkten A, B hindurchgeht. Bezeichnet r den Halbmesser des Kreises, so ist $e = 2r$, mithin die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{2}{\pi}.$$

96. **Problem XXXII.** *Die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass eine beliebig gezogene Gerade, welche einen gegebenen Halbkreis schneidet, auch den entgegengesetzten Halbkreis treffen wird.*

Lösung. Der gegebene Halbkreis ACB (Fig. 53) repräsentiert eine geschlossene teilweise konkave Kurve, welche durch die konvexe Kurve $AOBC$ zu ersetzen ist (Nr. 80). Eine Gerade, welche den gegebenen Halbkreis schneidet, wird auch den entgegengesetzten ADB treffen, wenn sie zwischen den Punkten A und B hindurchgeht. Im Sinne der Anmerkung zu Nr. 94 ist also

Fig. 53.



daher $$e = 2r, \quad L = \pi r + 2r,$$

$$p = \frac{4}{\pi + 2}.$$

97. **Problem XXXIII.** *Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass zwei willkürlich gezogene Sekanten einer geschlossenen konvexen Kurve innerhalb der Kurve sich schneiden.*

Lösung. Bezeichnet N die Gesamtzahl der Schnittpunkte, welche alle Sekanten der Kurve, deren Länge L sein möge, ergeben, Z die Anzahl jener Schnittpunkte, welche in die von der Kurve begrenzte Fläche, deren Inhalt J heissen soll, fallen, so ist

1) $$p = \frac{Z}{N}.$$

Die Anzahl der Sekanten ist L, daher die Anzahl ihrer Schnittpunkte

2) $$N = \frac{1}{2}L^2.$$

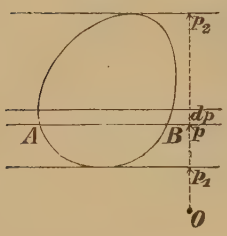
Um Z zu ermitteln, betrachten wir die Sekanten einer bestimmten Richtung und zählen die Schnittpunkte auf denselben, soweit sie innerhalb der Fläche enthalten sind. Zu diesem Zwecke heben wir jene Gruppe der erwähnten Sekanten heraus, deren Abstand von einem Pole O (Fig. 54 S. 130) zwischen den Grenzen p und $p + dp$ sich befindet; ihre Anzahl ist dp. Auf einer von diesen Sekanten liegen so viele innere Schnittpunkte, als es Gerade giebt, welche die Sehne AB schneiden, d. i. $2AB$, auf allen Sekanten

daher $2AB \,.\, dp$, und auf allen Sekanten der bezeichneten Richtung

$$\int_{p_1}^{p_2} 2AB\, dp = 2J$$

Schnittpunkte. Da diese Zahl von der Richtung unabhängig ist, so giebt es auf den Sekanten aller Richtungen $2\pi J$ innere Schnittpunkte; dabei aber wurde jeder doppelt gezählt, mithin ist

Fig. 54.



$$3) \qquad Z = \pi J.$$

Durch Einsetzung der Werte aus 2) und 3) in 1) ergiebt sich schliesslich

$$4) \qquad p = \frac{2\pi J}{L^2}.$$

So ist beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, dass zwei willkürlich über ein Quadrat gezogene Gerade ihren Schnittpunkt innerhalb des Quadrates haben,

$$p = \frac{2\pi s^2}{16\, s^2} = \frac{\pi}{8},$$

und für einen Kreis ist die betreffende Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{2\pi^2 r^2}{4\pi^2 r^2} = \frac{1}{2}$$

ein Maximum.

Anmerkung. Wird $AB = C$ gesetzt, so kann Gleichung 3) im Hinblick auf die ihr vorangehende Gleichung in der Form

$$\alpha) \qquad \iint C\, dp\, d\theta = \pi J$$

geschrieben werden, die Integration links auf alle Sekanten der Kurve ausgedehnt.

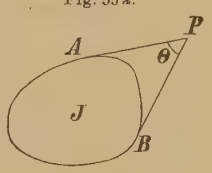
98. **Theorem VII.** *Die Dichte der gegenseitigen Schnittpunkte aller willkürlichen Sekanten einer konvexen geschlossenen Kurve ist in allen Punkten innerhalb der Kurve konstant und gleich π; in einem Punkte ausserhalb der Kurve beträgt sie $\theta - \sin\theta$, wenn θ den Winkel bedeutet, unter welchem sich die Kurve aus dem betrachteten Punkte projiziert.*

Beweis. 1. Um die Dichte der Schnittpunkte in einem Punkte innerhalb der Kurve zu ermitteln, umgeben wir diesen

Punkt mit einem unendlich kleinen Kreise oder einer anderen konvexen Figur von unendlich kleiner Ausdehnung; ihr Inhalt sei dJ. Die Zahl der Schnittpunkte in diesem Flächenelement durch dJ dividiert giebt die verlangte Dichte. Der Gleichung 3) Nr. 97 zufolge ist die Anzahl der inneren Schnittpunkte aller Geraden, welche den Umfang des Elementes dJ treffen, ausgedrückt durch $\pi \,.\, dJ$, ihre Dichte ist daher $\frac{\pi \,.\, dJ}{dJ} = \pi$, also unabhängig von der Lage des Punktes oder gleichförmig auf der ganzen von der Kurve begrenzten Fläche.

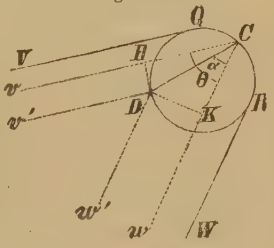
2. Ein ähnlicher Vorgang führt bei einem äusseren Punkte P (Fig. 55a) zum Ziele. Fig. 55b stellt den unendlich klein zu denkenden Kreis vor, welcher um den Punkt P verzeichnet worden ist; VQ, WR vertreten die Tangenten AP, BP der Fig. 55a; der Inhalt des Kreises sei dJ.

Fig. 55a.



Eine willkürlich gezogene Sehne CD des Kreises, welche in ihrer Verlängerung auch die gegebene Kurve schneidet, wird von so vielen Sekanten der letzteren getroffen, als es Gerade giebt, welche die Kurve und CD gleichzeitig schneiden. Die Anzahl dieser Sekanten wird nach Nr. 83 durch die Differenz $X - Y$ gemessen; in der Figur ist $v'DCDw'$ ein Teil von X (der sich kreuzenden), vCw ein Teil von Y (der offenen Saite), und bei der verschwindend kleinen Ausdehnung des Kreises seiner Entfernung von J gegenüber können $vC, v'D$, VQ einerseits und $w'D$, wC, WR anderseits als parallel gelten. Unter dieser Annahme ist

Fig. 55b.



$$\omega) \qquad X - Y = 2CD - CH - CK.$$

Für die Sehnen innerhalb eines an CD sich anschliessenden Parallelstreifens von der Breite dp ist daher die Anzahl der Schnittpunkte

$dp\,(2\,CD - CH - CK) = CD\,.\,dp\,(2 - \cos\{\theta - \alpha\} - \cos\alpha)$,

für alle Sehnen der Richtung CD gleich

$(2 - \cos\{\theta - \alpha\} - \cos\alpha)\int CD\,dp = (2 - \cos\{\theta - \alpha\} - \cos\alpha)\,dJ$,

endlich für alle zulässigen Richtungen der Sehne oder die Anzahl aller in den Kreis fallenden Schnittpunkte gleich

$$1)\quad \frac{1}{2}\,dJ\int_0^{\theta}(2 - \cos\{\theta - \alpha\} - \cos\alpha)\,d\alpha = (\theta - \sin\theta)\,dJ;$$

der Faktor $\frac{1}{2}$ musste hinzugefügt werden, weil sonst jeder Schnittpunkt zweimal gezählt würde.

Demnach ist die Dichte der Schnittpunkte in P gleich

$$2)\qquad \delta = \frac{(\theta - \sin\theta)\,dJ}{dJ} = \theta - \sin\theta,$$

wie behauptet worden ist.

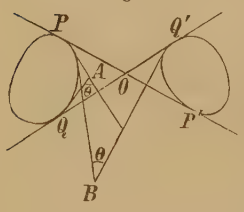
99. Anmerkung. Dieselben Betrachtungen wie in 2), Nr. 98, wären anzustellen, um die Dichte der gegenseitigen Schnittpunkte aller willkürlichen Geraden zu finden, welche zwischen zwei konvexen geschlossenen Kurven hindurchgehen; das Resultat lautet ebenfalls

$$\delta = \theta - \sin\theta,$$

nur muss bezüglich der Zählung des Winkels θ eine Bemerkung gemacht werden.

Fällt der Punkt, in welchem die Dichte zu ermitteln ist, in eines der gemischtlinigen Dreiecke OPQ, $OP'Q'$ (Fig. 56), z. B. nach A, so ist θ der Nebenwinkel jenes Winkels, welchen die aus A an die näher liegende Kurve geführten Tangenten einschliessen. Liegt der Punkt dagegen in einem der unendlichen Winkelräume POQ', $P'OQ$, z. B. in B, so gilt derjenige Winkel, den die inneren von B an die beiden Kurven gezogenen Tangenten bilden; kurz gesagt, es ist jedesmal derjenige Winkel zu nehmen, durch dessen Scheitel nur Linien der oben bezeichneten Art hindurchgehen.

Fig. 56.



Dem Satze Nr. 92 zufolge wird die Anzahl der zwischen den Kurven hindurchgehenden Geraden durch

$$PP' + QQ' - arc\,PQ - arc\,P'Q'$$

gemessen, die Anzahl ihrer gegenseitigen Schnittpunkte ist daher

$$\frac{1}{2}(PP' + QQ' - arc\,PQ - arc\,P'Q')^2;$$

daraus ergiebt sich der bemerkenswerte Satz, dass

1) $$\int\int(\theta - \sin\theta)\,dJ = \frac{1}{2}(PP' + QQ' - arc\,PQ - arc\,P'Q')^2,$$

die Integration über jenen Teil der Ebene ausgedehnt, welchen Gerade von der eingangs bezeichneten Art treffen, der Winkel θ in dem oben erörterten Sinne gezählt.

Auf die Hyperbel angewendet ergiebt sich

2) $$\int\int(\theta - \sin\theta)\,dJ = \frac{1}{2}\Delta^2,$$

wobei Δ den Unterschied zwischen den beiden Asymptoten und den beiden Hyperbelästen bezeichnet (vergl. Nr. 93); die Integration hat sich hier auf den zwischen den Hyperbelästen befindlichen Teil der Ebene zu erstrecken.

100. **Problem XXXIV.** *Die Zahl der äusseren Schnittpunkte aller willkürlichen Geraden zu ermitteln, welche eine geschlossene konvexe Kurve der Länge* L *und des Inhalts* J *schneiden.*

Lösung. Dem Satze Nr. 98, 2 zufolge wird die Anzahl dieser Schnittpunkte durch das Integral

$$\int\int(\theta - \sin\theta)\,dJ$$

ausgedrückt, ausgedehnt über alle Elemente der Ebene, welche ausserhalb der Kurve sich befinden.

Andererseits ist die Anzahl aller Schnittpunkte, der äusseren wie der inneren, $\frac{1}{2}L^2$, die der inneren aber nach Gleichung 3), Nr. 97, πJ, folglich die Anzahl der äusseren $\frac{1}{2}L^2 - \pi J$.

Daraus ergiebt sich der bemerkenswerte Satz: „Bezeichnet θ den Winkel, unter welchem sich eine geschlossene konvexe Kurve von der Länge L und dem Inhalte J aus einem äusseren Punkte ihrer Ebene projiziert, und dJ das Element der Ebene an jenem Punkte, so ist

$$\int\int (\theta - \sin\theta)\, dJ = \frac{1}{2} L^2 - \pi J,$$

das Integral auf die ganze Ebene ausserhalb der Kurve ausgedehnt.“*

Die Richtigkeit dieses Satzes lässt sich leicht durch Anwendung auf den Kreis verifizieren. Hier bleibt θ für alle Punkte eines mit dem gegebenen konzentrischen Kreises konstant, dJ ist also die Fläche eines unendlich schmalen Kreisringes. Heisst der Halbmesser des gegebenen Kreises r, der des variablen ϱ, so ist

$$\varrho = \frac{r}{\sin\frac{\theta}{2}}, \quad d\varrho = -\frac{r\cos\frac{\theta}{2}\, d\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}, \quad dJ = 2\pi\varrho\, d\varrho,$$

mithin

$$\int\int (\theta - \sin\theta)\, dJ = \pi r^2 \int_{\pi}^{0} (\sin\theta - \theta)\, \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

$$= \pi r^2 \int_{\pi}^{0} \left(4\, \mathrm{cotg}^2\frac{\theta}{2} - 2\theta\, \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}} \right) d\frac{\theta}{2} = \pi^2 r^2,$$

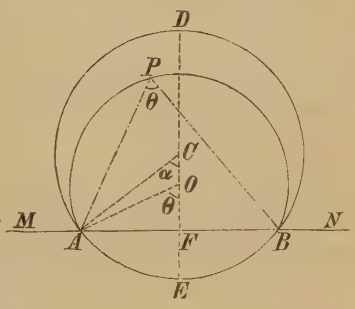
was thatsächlich gleichkommt der Differenz $\frac{1}{2}(2\pi r)^2 - \pi \cdot \pi r^2$.

* Die erste Mitteilung von diesem schönen Satze hat Crofton der Pariser Akademie 1867 gemacht (s. Comptes rendus, 65. Bd., pag. 994 u. 995). Ein analytischer Nachweis desselben von Serret findet sich in den „Annales scientif. de l'école norm. super.“, VI (1869), pag. 177—185 (auch Comptes rendus, 1869, pag. 1132—1137). Serret geht dabei von einem konvexen geradlinigen Polygon mit beliebig vielen Seiten aus und gelangt auf einem interessanten, wenn auch umständlichen Wege zu dem obigen Resultate, welches er auch auf den Fall ausdehnt, dass der Contour aus krummen und geraden Teilen zusammengesetzt ist.

101. **Problem XXXV.** *Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die gegenseitigen Schnittpunkte dreier willkürlich gezogener Sekanten eines Kreises sämtlich innerhalb des Kreises sich befinden.*

Lösung. Es sei C (Fig. 57) der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, $AC = c$ sein Halbmesser. Wir heben irgend eine Sekante MN heraus. Die Anzahl der günstigen Sekantentripel, zu welchen MN gehört, ist gleich der Anzahl der Geradenpaare, welche die Sehne AB schneidend ihren Schnittpunkt innerhalb des gegebenen Kreises haben, und diese Anzahl ist dem Satze Nr. 98, 2 zufolge durch das über die Fläche des gegebenen Kreises ausgedehnte Integral

Fig. 57.



$$\int\int (\theta - \sin\theta)\, dJ$$

ausgedrückt.

Da θ in allen Punkten eines durch A, B gehenden Kreisbogens konstant bleibt, so denken wir uns den gegebenen Kreis durch derlei Kreisbögen wie APB in Elemente zerlegt. Ein solches Element hat die Grösse

$$dJ = d \,.\, segm\, ABP.$$

Ist nun O das Centrum des Bogens APB, $AO = \varrho$ sein Halbmesser, $AB = 2a$, so hat man

$$segm\, ABP = (\pi - \theta)\varrho^2 + a\varrho \cos\theta = a^2\left(\frac{\pi - \theta}{\sin^2\theta} + cotg\,\theta\right),$$

daraus

$$dJ = -\frac{2a^2}{\sin^2\theta}\{1 + (\pi - \theta)\, cotg\,\theta\}\, d\theta.$$

Demnach ist die Anzahl der zu MN gehörigen günstigen Sekantentripel, deren dritter Schnittpunkt über MN liegt:

$$N_1 = -\int_{\pi}^{\alpha} \frac{2a^2}{\sin^2\theta}(\theta - \sin\theta)\{1 + (\pi - \theta)\cot g\,\theta\}\,d\theta = 2a^2 \int_{\alpha}^{\pi} \frac{\theta - \sin\theta}{\sin^2\theta}\{1 + (\pi - \theta)\cot g\,\theta\}\,d\theta$$

$$= 2a^2 \int_{\alpha}^{\pi} \left(\frac{\theta}{\sin^2\theta} + \pi \frac{\theta\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{\theta^2\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{1}{\sin\theta} - \pi \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\theta\cos\theta}{\sin^2\theta} \right) d\theta.$$

Durch Ausführung der einzelnen Integrationen zunächst ohne Rücksicht auf die Grenzen erhält man den Ausdruck

$$-\frac{\pi\theta}{2\sin^2\theta} - \frac{\pi}{2}\cot g\,\theta + \frac{\theta^2}{2\sin^2\theta} + \frac{\pi}{\sin\theta} - \frac{\theta}{\sin\theta} = \frac{\pi - \theta}{\sin\theta} + \frac{\theta^2 - \pi\theta - \frac{1}{2}\pi\sin 2\theta}{2\sin^2\theta},$$

dessen beide Teile für die obere Grenze die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen; der erste Bestandteil

$$\frac{\pi - \theta}{\sin\theta} = \frac{\pi - \theta}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{\delta}{\sin\delta}$$

aber nähert sich mit gegen Null abnehmendem δ der Grenze 1, während der zweite Bestandteil den Grenzwert $\frac{1}{2}$ hat, wie man durch zweimaliges Differentiieren des Zählers und Nenners leicht findet. Mithin ist

1) $$N_1 = 2a^2\left(\frac{3}{2} - \frac{\pi - \alpha}{\sin\alpha} + \frac{\pi\alpha - \alpha^2 + \frac{1}{2}\pi\sin 2\alpha}{2\sin^2\alpha}\right).$$

Die Anzahl N_2 der günstigen Sekantentripel, deren dritter Schnittpunkt unter MN liegt, ergiebt sich offenbar, wenn man in dem eben angeschriebenen Ausdrucke α durch $\pi - \alpha$ ersetzt. Die Summe $N_1 + N_2$ liefert die Anzahl aller zu MN gehörigen günstigen Sekantentripel, d. i.

2) $$N = 2a^2\left(3 - \frac{\pi}{\sin\alpha} + \frac{\pi\alpha - \alpha^2}{\sin^2\alpha}\right) = 2c^2(3\sin^2\alpha - \pi\sin\alpha + \pi\alpha - \alpha^2).$$

Um nun die Anzahl aller günstigen Sekantentripel zu erhalten, welche eine zu MN parallele Gerade in sich schliessen, hat man N mit dem Differentiale von CF, d. i. mit $c\sin\alpha\,d\alpha$ zu multiplizieren und das Produkt in Bezug auf α zwischen den Grenzen 0 und π, welche den beiden

äussersten Lagen von MN entsprechen, zu integrieren. Der so gewonnene Ausdruck ist, um alle Richtungen von MN einzubeziehen, also die Anzahl aller günstigen Sekantentripel zu erhalten, mit π zu multiplizieren, dagegen durch 3 zu dividieren, weil bei dem eingeschlagenen Vorgange jedes Tripel dreimal gezählt wird, indem jede Sekante aus demselben einmal die Rolle von MN spielt. Mithin ist die Gesamtzahl der günstigen Fälle

$$3)\quad Z=\frac{2\pi c^3}{3}\int_0^{\pi}(3\sin^2\alpha-\pi\sin\alpha+\pi\alpha-\alpha^2)\sin\alpha\,d\alpha=\frac{\pi c^3}{3}(16-\pi^2).$$

Die Anzahl der möglichen und verschiedenen Sekantentripel ist

$$4)\quad M=\frac{1}{6}(2\pi c)^3=\frac{4}{3}\pi^3 c^3,$$

die verlangte Wahrscheinlichkeit also

$$5)\quad p=\frac{Z}{M}=\frac{4}{\pi^2}-\frac{1}{4}.$$

102. **Theorem VIII.** *Die Dichte der Schnittpunkte aller willkürlichen Sekanten einer geschlossenen konvexen Kurve mit der Gesamtheit jener willkürlichen Geraden in der unbegrenzten Ebene, welche die Kurve nicht schneiden, beträgt in einem Punkte ausserhalb der Kurve* $2\sin\theta$, *wenn* θ *den Winkel bedeutet, unter welchem sich die Kurve aus dem Punkte projiziert; in jedem Punkte innerhalb der Kurve ist sie selbstverständlich gleich Null.*

Fig. 58a.

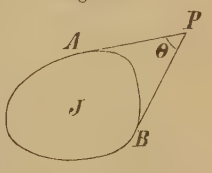
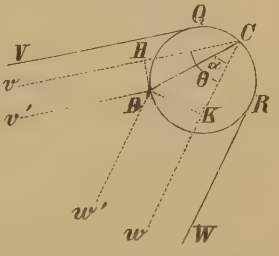


Fig. 58b.



Beweis. Zum Zwecke der Begründung umgeben wir den betrachteten Punkt P (Fig. 58a) mit einem Kreise von unendlich kleiner Ausdehnung (Fig. 58b) und zählen die Schnittpunkte beschriebener Art, welche in diesen Kreis fallen.

Die Sehne CD gehöre einer Geraden des ersten Systems an; dann ist die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit den Geraden des zweiten Systems gleich der

Anzahl ihrer Schnittpunkte mit allen willkürlichen Geraden der Ebene, d. i. $2CD$, vermindert um die Anzahl jener Schnittpunkte, welche sie mit den Geraden des ersten Systems selbst ergiebt, und diese beträgt nach Gleichung ω), Nr. 98, $2CD - CH - CK$; demnach ergeben sich auf CD

$$2CD - (2CD - CH - CK) = CH + CK = CD[\cos\alpha + \cos(\theta - \alpha)]$$

Schnittpunkte, folglich auf den Sehnen eines an CD anschliessenden unendlich schmalen Parallelstreifens von der Breite dp

$$[\cos\alpha + \cos(\theta - \alpha)]\, CD \,.\, dp$$

und auf allen Sehnen von der Richtung CD

$$[\cos\alpha + \cos(\theta - \alpha)] \int CD\, dp = [\cos\alpha + \cos(\theta - \alpha)]\, dJ$$

Schnittpunkte, wenn dJ den Inhalt des Kreises bezeichnet. Alle Sehnen des Kreises, welche Geraden des ersten Systems angehören, liefern demnach mit den Geraden des zweiten Systems Schnittpunkte in der Anzahl

$$1) \qquad dJ \int_0^{\theta} [\cos\alpha + \cos(\theta - \alpha)]\, d\alpha = 2\sin\theta \,.\, dJ,$$

also von der Dichte

$$2) \qquad \delta = \frac{2\sin\theta \,.\, dJ}{dJ} = 2\sin\theta.$$

Die Menge der Schnittpunkte, welche auf einen irgendwie begrenzten Teil der Ebene fallen, wird durch das über diesen Teil ausgedehnte Integral

$$2 \int\int \sin\theta \, dJ$$

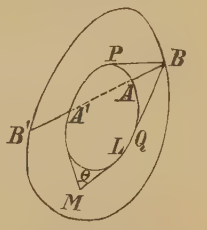
ausgedrückt. Die Integration ist nur für gewisse Formen durchführbar; der folgende Fall, indem er die Zählung der Schnittpunkte auf anderem Wege gestattet, wird zu einer allgemeinen Formel für dieses Integral führen.

103. **Problem XXXVI.** *Eine geschlossene konvexe Kurve, deren Länge* L *ist, wird mit einer zweiten ebenso beschaffenen Kurve umgeben, welche dadurch entsteht, dass man um erstere eine endlose Saite von der Länge* $Y > L$ *legt und einen Stift derart führt, dass er die Saite beständig spannt. Es ist die Zahl der Schnittpunkte zu ermitteln, welche die willkürlichen Sekanten von* L *mit allen willkürlichen Geraden der Ebene, die*

L *nicht schneiden, auf der durch beide Kurven begrenzten ringförmigen Fläche ergeben.*

Lösung. Wir betrachten die Sehne AB (Fig. 59) der ringförmigen Fläche, welche einer Sekante von L angehört; sie ergiebt mit allen willkürlichen Geraden der Ebene $2AB$ Schnittpunkte; mit den Geraden, welche L schneiden, liefert sie deren $X - Y$, wobei X die Länge der endlosen, AB und L umspannenden verschlungenen Saite bedeutet, also

Fig. 59.



$$X = A'PABAQA' = L + 2AB$$

ist; daher giebt AB mit jenen Geraden, welche L nicht schneiden:

$$2AB - (X - Y) = 2AB - (L + 2AB - Y) = Y - L$$

Schnittpunkte. Diese Anzahl ist also für alle Lagen von AB dieselbe, gilt daher auch für $A'B'$, so dass sich auf jeder Sekante von L

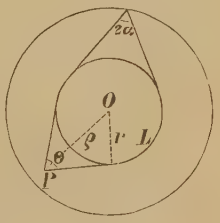
$$2(Y - L),$$

auf allen Sekanten, deren Anzahl L ist, daher

$$2L(Y - L)$$

Schnittpunkte befinden. Andererseits ist dem vorangegangenen Satze zufolge diese Anzahl dem über die Ringfläche ausgedehnten Integral

Fig. 60.



$$2\iint \sin\theta \, dJ$$

gleich, so dass unter den im Texte vorgesehenen Bedingungen

$$\omega) \qquad \iint \sin\theta \, dJ = L(Y - L).$$

104. Die Formel ω) kann durch Anwendung auf den Kreis verifiziert werden. Hier bleibt θ für alle Punkte P (Fig. 60), welche von O denselben Abstand ϱ besitzen, konstant; daher kann für dJ ein Kreisring von der Breite $d\varrho$ genommen werden. Nun ist

$$\varrho = \frac{r}{\sin\frac{\theta}{2}}, \quad d\varrho = -\frac{r\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}} d\frac{\theta}{2},$$

daraus

$$\sin\theta\, dJ = 2\pi\varrho \sin\theta\, d\varrho = -4\pi r^2 \operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}\, d\frac{\theta}{2};$$

mithin hat man

$$\int\int \sin\theta\, dJ = 4\pi r^2 \int_{2\alpha}^{\pi} \operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}\, d\frac{\theta}{2} = 4\pi r^2 \left\{\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right\}_{2\alpha}^{\pi}$$

$$= 2\pi r\{2r\operatorname{cotg}\alpha - r(\pi - 2\alpha)\}.$$

Da nun

$$L = 2\pi r, \quad Y = 2\pi r - r(\pi - 2\alpha) + 2r\operatorname{cotg}\alpha,$$
$$Y - L = 2r\operatorname{cotg}\alpha - r(\pi - 2\alpha),$$

so kommt der Wert des Integrals thatsächlich gleich $L(Y-L)$.

105. Zu einem interessanten Satze führt die Anwendung der Formel ω) auf eine begrenzte Gerade FF' (Fig. 61) von der Länge $2c$, wenn dieselbe als geschlossene konvexe Kurve von der Länge $4c$ angesehen wird. In diesem Falle ist nämlich die mit Benutzung einer Saite von der Länge $Y = 2c + 2a$ erzeugte Kurve eine Ellipse, für welche die Endpunkte F, F' der begrenzten Geraden die Rolle von Brennpunkten spielen, und deren grosse Axe die Länge $2a$ besitzt. Das über die Fläche dieser Ellipse ausgedehnte Integral $\int\int \sin\theta\, dJ$ hat der citierten Formel gemäss den Wert $4c(2c + 2a - 4c) = 8c(a - c)$, oder es ist das über die ganze Ellipsenfläche ausgedehnte Integral

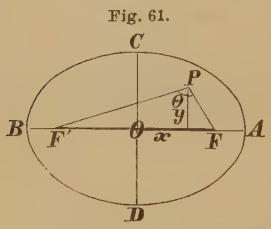


Fig. 61.

$$\int\int \sin\theta\, dx\, dy = 8c(a - c).*$$

106. **Theorem IX.** *Die Dichte der Schnittpunkte aller willkürlichen Sekanten einer geschlossenen konvexen Kurve mit der Gesamtheit aller willkürlichen Geraden der unbegrenzten Ebene beträgt in einem Punkte innerhalb der Kurve 2π, in einem Punkte ausserhalb der Kurve 2θ, wenn θ den Winkel bedeutet, unter welchem sich die Kurve aus dem Punkte projiziert.*

Beweis. 1. Wird um einen beliebigen Punkt innerhalb der Kurve ein unendlich kleiner Kreis beschrieben, dessen

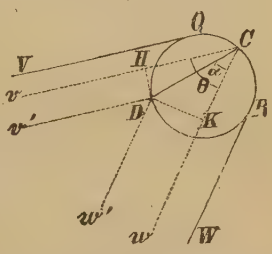
* Einen direkten Nachweis dieser Formel hat E. B. Elliott im XXVI. Bande der Educ. Tim., pag. 79 flg., gegeben.

Inhalt dJ ist, so liefern alle Sekanten desselben, als Sekanten der Kurve aufgefasst, mit allen willkürlichen Geraden der Ebene innerhalb des Kreises $2\pi dJ$ Schnittpunkte [s. Nr. 97, Absatz vor Gleichung 3)]; ihre Dichte ist also

1) $$\delta_1 = 2\pi.$$

2. Wie früher möge Fig. 62 den Kreis vorstellen, welcher den betrachteten Punkt P umgiebt; VQ, WR repräsentieren die aus P an die Kurve geführten Tangenten, deren Neigungswinkel θ ist. Die Sehne CD gehöre einer Geraden des ersten Systems, d. i. einer Geraden an, welche die Kurve schneidet; die Zahl ihrer Schnittpunkte mit den Geraden des zweiten Systems, d. i. mit allen willkürlichen Geraden der Ebene, ist $2CD$; für alle Sehnen parallel zu CD ist diese Anzahl

Fig. 62.



$$2\int CD\, dp = 2dJ,$$

und für Sehnen aller zulässigen Richtungen $2\theta\, dJ$, so dass die Dichte der Schnittpunkte gleichkommt

2) $$\delta_2 = 2\theta.$$

1. Anmerkung. Der zweite Teil des vorliegenden Satzes kann auch als Folgerung der beiden Sätze Nr. 98 und 102 abgeleitet werden. Die Schnittpunkte, welche die Sekanten der Kurve mit allen willkürlichen Geraden der Ebene bilden, zerfallen nämlich in zwei Gruppen: in jene mit den Geraden, welche die Kurve treffen, und in jene mit den Geraden, welche die Kurve nicht schneiden. Die Anzahl der ersten ist nach Gleichung 1), Nr. 98:

$$2(\theta - \sin\theta)\, dJ;$$

der Faktor $\frac{1}{2}$, welcher dort linker Hand gesetzt werden musste, weil es sich um die gegenseitigen Schnitte von Geraden eines Systems gehandelt hat, fällt hier weg, weil zwei verschiedene Systeme von Geraden zum Schnitte gebracht werden. Die Anzahl der Schnittpunkte zweiter Art ist nach Gleichung 1), Nr. 102:

$$2 \sin\theta \, dJ,$$

daher die Summe beider Anzahlen

$$2\theta \, dJ$$

wie oben.

2. Anmerkung. Die Anzahl der Schnittpunkte von der hier besprochenen Art, welche auf einen gegebenen Teil der Ebene ausserhalb der Kurve fallen, wird durch das über diesen Teil ausgedehnte Integral

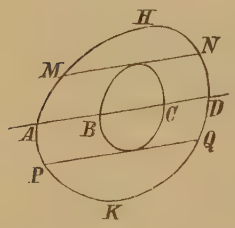
$$2\int\int \theta \, dJ$$

ausgedrückt, dessen Auswertung jedoch nur in einzelnen Fällen gelingt. Eine allgemeine Formel für dieses Integral ergiebt der nachstehende Fall, in welchem die Zählung der Schnittpunkte in anderer Art ausführbar ist.

107. **Problem XXXVII.** *Eine geschlossene konvexe Kurve ist von einer andern beliebig gestalteten geschlossenen Kurve eingeschlossen. Es ist die Anzahl der Schnittpunkte zu ermitteln, welche die Sekanten der ersten Kurve mit allen willkürlichen Geraden der Ebene auf der durch beide Kurven begrenzten ringförmigen Fläche ergeben.*

Lösung. Wir betrachten eine beliebige Sekante AD (Fig. 63) der inneren Kurve; die Anzahl der auf ihr gelegenen Schnittpunkte von der beschriebenen Art ist $2(AB + CD)$, folglich giebt es auf allen, AD parallelen Sekanten

Fig. 63.



$$2\int (AB + CD)\, dp$$
$$= 2(\Theta - segm\, MNH - segm\, PQK)$$

und auf allen Sekanten

$$N = 2\int_0^{\pi} (\Theta - segm\, MNH - segm\, PQK)\, d\varphi$$

Schnittpunkte, wenn Θ die Fläche des Ringes bedeutet und φ der Winkel ist, den MN mit einer festen Richtung einschliesst. Durch weitere Ausführung erhält man zunächst

$$N = 2\pi\Theta - 2\int_0^{\pi} (segm\, MNH + segm\, PQK)\, d\varphi;$$

den zweiten Teil der rechten Seite kann man aber auch dadurch erhalten, dass man, statt beide Tangenten MN, PQ

durch das Intervall o bis π zu drehen, nur eine, z. B. MN, durch das Intervall o bis 2π dreht, weil sie dann auch alle jene Lagen annimmt, welche früher PQ eingenommen hat. Bezeichnet man daher die Fläche des Segmentes MNH mit Σ, so ist nach dieser Bemerkung

$$N = 2\pi\Theta - 2\int_0^{2\pi} \Sigma\, d\varphi.$$

Andererseits hat man auf Grund von Nr. 106, 2. Anmerkung:

$$N = 2\iint \theta\, dx\, dy;$$

unter den im Texte vorgesehenen Bedingungen besteht also die bemerkenswerte Beziehung

$$1) \qquad \iint \theta\, dx\, dy = \pi\Theta - \int_0^{2\pi} \Sigma\, d\varphi.$$

Ein interessanter Spezialfall tritt ein, wenn das durch die Tangente MN abgeschnittene Segment MNH konstanten Inhalt hat; dann ist nämlich

$$\iint \theta\, dx\, dy = \pi\Theta - 2\pi\Sigma = \pi(\Theta - 2\Sigma),$$

und da $MNH = PQK = \Sigma$, so bedeutet $\Theta - 2\Sigma$ den Unterschied der beiden Teile, in welche der Ring durch die Tangente MN zerlegt wird, woraus der Satz folgt: „Wenn zwei beliebige geschlossene konvexe Kurven, deren eine die andere einschliesst, in solchem Zusammenhange stehen, dass jede an die innere Kurve gezogene Tangente von der äusseren dieselbe Fläche abschneidet; wenn θ der Winkel ist, unter welchem die innere Kurve aus einem äusseren Punkte x, y sich projiziert; wenn endlich Δ die Differenz der Teile ist, in welche die ringförmige von beiden Kurven eingeschlossene Fläche durch eine Tangente an die innere Kurve zerlegt wird, so besteht die Relation

$$2) \qquad \iint \theta\, dx\, dy = \pi\Delta,$$

die Integration über die Ringfläche ausgedehnt".

Der hier vorausgesetzte Zusammenhang findet bei zwei konzentrischen Kreisen, mithin auch bei zwei konzentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen statt, weil letztere

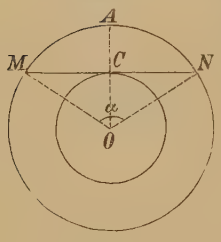
als Parallelprojektion der ersteren angesehen werden können, und da in diesem Falle Δ auf elementarem Wege abgeleitet werden kann, so führt der obige Satz zu dem Werte eines bestimmten Integrals, dessen Auswertung auf direktem Wege nicht so leicht wäre.

Bezieht man nämlich die beiden Ellipsen, deren Halbaxen a, b; $\varkappa a, \varkappa b$ $(\varkappa > 1)$ sein mögen, auf ihre Axen als Koordinatenaxen, so ergiebt sich zunächst:

$$3) \qquad \theta = arc\,tang \frac{2\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2}}{x^2 + y^2 - a^2 - b^2}.$$

Die beiden Kreise (Fig. 64), aus welchen die Ellipsen abgeleitet werden können, haben die Radien a und $\varkappa a$; führt man an den inneren eine Tangente MN, so ist der Unterschied der Teile, in welche sie den Ring zerlegt:

Fig. 64.



$$\Delta' = \pi(\varkappa^2 a^2 - a^2) - 2\,segm\,MNA = \pi(\varkappa^2 a^2 - a^2) - 2\left(\varkappa^2 a^2 \frac{\alpha}{2} - \varkappa^2 a^2 \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \varkappa^2 a^2 \left\{\pi\left(1 - \frac{1}{\varkappa^2}\right) - \alpha + \sin\alpha\right\},$$

oder weil $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{OC}{ON} = \frac{1}{\varkappa}$ ist, auch

$$\Delta' = \varkappa^2 a^2 \left(\pi \sin^2\frac{\alpha}{2} - \alpha + \sin\alpha\right);$$

die Übertragung auf die Ellipsen erfolgt durch Multiplikation mit $\frac{b}{a}$, daher ist für diese

$$4) \qquad \Delta = \varkappa^2 ab \left(\pi \sin^2\frac{\alpha}{2} - \alpha + \sin\alpha\right).$$

Durch Einführung der Werte 3) und 4) in die Formel 2) des oben formulierten Satzes erhält man

$$5) \quad \int\int arctg \frac{2\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2}}{x^2 + y^2 - a^2 - b^2}\, dx\, dy = \pi\varkappa^2 ab \left\{\pi \sin^2\frac{\alpha}{2} - \alpha + \sin\alpha\right\},$$

wobei $\alpha = 2\,arc\cos\frac{1}{\varkappa}$ und die Integration über die Ringfläche auszudehnen ist.

Für $x^2 = 2$ wird $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und

$$\int\int arc\,tang \frac{2\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2}}{x^2 + y^2 - a^2 - b^2}\, dx\, dy = 4\pi ab,$$

d. i. gleich der Fläche der äusseren Ellipse.

108. **Theorem X.** *Die Dichte der Schnittpunkte aller willkürlichen Sekanten einer geschlossenen konvexen Kurve mit allen Sekanten einer zweiten, die erste einschliessenden Kurve von ebensolcher Beschaffenheit beträgt in einem Punkte innerhalb der ersten Kurve* 2π, *in einem Punkte zwischen beiden Kurven* 2θ, *in einem Punkte ausserhalb der zweiten Kurve* $u_{\theta+\varphi} + u_{\theta+\psi} - u_\varphi - u_\psi$, *wenn* θ *den Winkel bedeutet, unter welchem die innere Kurve,* φ, ψ *die Winkel, unter welchen der Ring aus dem betreffenden Punkte sich projiziert, und wenn endlich zur Abkürzung* $\alpha - \sin\alpha = u_\alpha$ *gesetzt wird.*

Beweis. 1. Verzeichnet man um den Punkt innerhalb der ersten Kurve einen unendlich kleinen Kreis vom Inhalte dJ, so ergeben alle Sekanten desselben, als Sekanten der inneren Kurve aufgefasst, mit allen Sekanten der äusseren Kurve, oder was dasselbe ist, mit allen willkürlichen Geraden der Ebene, nach Nr. 97, Absatz vor Gleichung 3), $2\pi\, dJ$ Schnittpunkte auf der Fläche des Kreises; ihre Dichte ist also

$$1) \qquad \delta_1 = 2\pi.$$

2. Die Dichte der Schnittpunkte aller Sekanten der inneren Kurve mit allen Sekanten der äusseren in einem Punkte der ringförmigen Fläche ist abermals gleichbedeutend mit der Dichte der Schnittpunkte der ersten mit allen willkürlichen Geraden der Ebene, daher nach Nr. 106

$$2) \qquad \delta_2 = 2\theta.$$

3. Zählt man auf einer unendlich kleinen, den Punkt P (Fig. 65, S. 146) umgebenden Kreisfläche vom Inhalte dJ die gegenseitigen Schnittpunkte der Sekanten der konvexen Figur $ACHDFA$, deren Anzahl zufolge der Gleichung 1) Nr. 98 gleichkommt

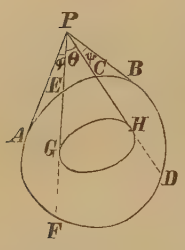
$$[(\theta + \varphi) - \sin(\theta + \varphi)]\, dJ = u_{\theta+\varphi}\, dJ,$$

sodann die gegenseitigen Schnittpunkte der Sekanten der konvexen Figur $BEGFDB$, deren Anzahl

$$[(\theta + \psi) - \sin(\theta + \psi)]\, dJ = u_{\theta+\psi}\, dJ$$

beträgt, so werden die gegenseitigen Schnittpunkte der Sekanten der konvexen Figur $EGFDHCE$ zweimal gezählt; sie müssen in der gesuchten Anzahl aber auch wirklich zweimal vorkommen, da jede Sekante der letztgenannten Figur in zwei Eigenschaften, einmal als Sekante der inneren, einmal als Sekante der äusseren Kurve aufzufassen ist; dagegen befinden sich unter den oben gezählten Schnittpunkten solche, welche zu den in Rede stehenden nicht gehören; das sind nämlich die gegenseitigen Schnittpunkte der Sekanten der beiden konvexen Figuren $AEGFA$ und $BCHDB$, deren Anzahlen sind

Fig. 65.



$$(\varphi - \sin\varphi)\, dJ = u_\varphi\, dJ,$$
$$(\psi - \sin\psi)\, dJ = u_\psi\, dJ.$$

Demnach ist die Dichte der Schnittpunkte bei P thatsächlich gleich

3) $$\delta_3 = u_{\theta+\varphi} + u_{\theta+\psi} - u_\varphi - u_\psi.$$

1. Anmerkung. Auf dem Umfange der inneren Kurve ist $\theta = \pi$, folglich

$$\delta_2 = 2\pi = \delta_1;$$

auf dem Umfange der äusseren Kurve ist $\varphi + \theta + \psi = \pi$, daher

$$\delta_3 = \theta + \varphi - \sin(\theta + \varphi) + \theta + \psi - \sin(\theta + \psi)$$
$$- \varphi + \sin\varphi - \psi + \sin\psi = 2\theta = \delta_2,$$

weil $\sin(\theta + \varphi) = \sin\psi$, $\sin(\theta + \psi) = \sin\varphi$ ist; der Übergang von δ_3 zu δ_2 und von δ_2 zu δ_1 erfolgt also auf kontinuierliche Weise.

2. Anmerkung. Bezeichnet L die Länge, J den Inhalt der inneren, L' die Länge der äusseren Kurve, so ist die Anzahl aller Schnittpunkte LL'; davon befinden sich innerhalb der inneren Kurve $\delta_1 J = 2\pi J$; die Anzahl der übrigen ist also $LL' - 2\pi J$. Andererseits ist letztere Anzahl ausgedrückt durch

$$\iint \delta_2 \, dJ + \iint \delta_3 \, dJ,$$

die erste Integration auf den Ring, die zweite über die ganze Ebene ausserhalb L' ausgedehnt. Es besteht also die bemerkenswerte Gleichung:

4) $$2\iint \theta \, dJ + \iint (u_{\theta+\varphi} + u_{\theta+\psi} - u_\varphi - u_\psi) \, dJ = LL' - 2\pi J.$$

109. **Problem XXXVIII.** *In jedem von zwei konzentrischen Kreisen, deren Halbmesser* a *und* $\varkappa a \, (\varkappa > 1)$ *sind, wird eine willkürliche Sekante gezogen. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass der Schnittpunkt der beiden Geraden auf der Fläche des inneren Kreises, auf der Ringfläche, ausserhalb der beiden Kreise liegen wird.*

Lösung. Von den $LL' = 4\pi^2 \varkappa a^2$ Schnittpunkten aller Sekanten der beiden Kreise fallen dem obigen Satze zufolge

$$2\pi J = 2\pi^2 a^2$$

auf die Fläche des inneren Kreises,

$$2\iint \theta \, dJ = 2\pi \varkappa^2 a^2 \left(\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \alpha + \sin \alpha\right)$$

auf die Ringfläche (s. Nr. 107), folglich $4\pi^2 \varkappa a^2 - 2\pi^2 a^2 - 2\pi \varkappa^2 a^2 (\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \alpha + \sin \alpha)$ ausserhalb der beiden Kreise; die bezüglichen Wahrscheinlichkeiten sind also

$$p_1 = \frac{1}{2\varkappa},$$

$$p_2 = \frac{\varkappa}{2\pi}\left(\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \alpha + \sin \alpha\right), \quad \left(\alpha = 2 \arccos \frac{1}{\varkappa}\right),$$

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2.$$

Anmerkung. Für $\varkappa = 2$ erhält man beispielsweise

$$p_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0{,}3535\ldots, \quad p_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} = 0{,}2251\ldots, \quad p_3 = 0{,}4214\ldots$$

Wenn $\varkappa = 1$ wird, so fallen die beiden Kreise zusammen; obige Formeln ergeben dann

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = \frac{1}{2},$$

übereinstimmend mit Nr. 97.

110. **Tangenten einer ebenen Kurve.** Der Begriff einer willkürlich gezogenen Tangente lässt verschiedene Auffassungen zu; er wird erst dann ein bestimmter, wenn die Entstehungsweise der Tangente näher bezeichnet worden ist.

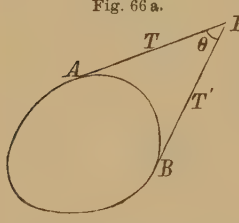
Die beiden nächstliegenden Auffassungen bestehen darin, dass man den Berührungspunkt willkürlich angenommen oder die Richtung der Tangente beliebig voraussetzt.

Die Berührungspunkte der Tangenten erster Art sind über die Kurve gleichförmig verteilt, sie zerlegen sie in gleichgrosse Elemente.

Die Richtungen der Tangenten zweiter Art sind über das ganze Richtungsgebiet gleichförmig verteilt, sie bilden gleichgrosse Kontingenzwinkel.

111. **Theorem XI.** *Die Dichte der Schnittpunkte aller Tangenten, welche in beliebiger Richtung an eine geschlossene konvexe Kurve gezogen werden können, in einem Punkte ausserhalb der Kurve beträgt* $\frac{\sin\theta}{TT'}$, *wenn* θ *der Winkel ist, unter welchem sich die Kurve aus diesem Punkte projiziert, und* T, T' *die Längen der Tangenten bezeichnen, welche von ihm an die Kurve gezogen werden.*

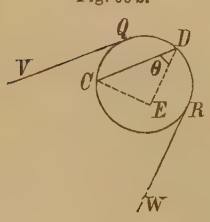
Fig. 66a.



Beweis. Fig. 66b stellt den Kreis vor, der um den Punkt P (Fig. 66a) verzeichnet wird; VQ, WR vertreten die Tangenten PA, PB der Fig. 66a.

Die Tangenten der Kurve, welche diesen Kreis schneiden, können in zwei Gruppen geschieden werden:

Fig. 66b.



1. jene, deren Berührungspunkte in unmittelbarer Nähe des Punktes A (Fig. 66a) liegen; innerhalb des unendlich kleinen Kreises können sie als parallel zu VQ vorausgesetzt werden; 2. jene, deren Berührungspunkte in unmittelbarer Nähe des Punktes B liegen; sie können aus demselben Grunde als parallel zu WR angesehen werden.

Bezeichnet ϑ den im Bogenmass ausgedrückten, unendlich kleinen, konstanten Kontingenzwinkel benachbarter

Tangenten der Kurve, so haben die Tangenten der ersten Gruppe innerhalb des Kreises, da sie hier vom Berührungspunkte den Abstand T besitzen, den gegenseitigen Abstand $T\vartheta$, die Tangenten der zweiten Gruppe den Abstand $T'\vartheta$.

Die Sehne CD (Fig. 66b) gehöre nun einer Tangente der ersten Gruppe an; um die Tangenten der zweiten Gruppe zu zählen, welche CD schneiden, führe man DE parallel, CE senkrecht zu WR; die eben berührte Anzahl ist dann:

$$\frac{CE}{T'\vartheta} = \frac{CD \sin\theta}{T'\vartheta},$$

daher die Anzahl aller Schnittpunkte innerhalb des Kreises

$$\frac{\sin\theta}{T'\vartheta} \Sigma CD;$$

da aber

$$\Sigma CD \,.\, T\vartheta = dJ = T\vartheta \,\Sigma CD,$$

wenn dJ den Inhalt des Kreises bedeutet, so schreibt sich obige Anzahl auch in der Form

$$\alpha) \qquad \frac{1}{\vartheta^2} \frac{\sin\theta}{TT'} dJ,$$

die Dichte der Schnittpunkte ist also mit Hinweglassung des konstanten Faktors $\frac{1}{\vartheta^2}$ ausgedrückt durch

$$1) \qquad \delta = \frac{\sin\theta}{TT'}.$$

112. **Problem XXXIX.** *Die Anzahl der gegenseitigen Schnittpunkte aller Tangenten, die an eine konvexe geschlossene Kurve in beliebigen Richtungen gezogen werden können, innerhalb eines gegebenen Teiles der Ebene zu finden.*

Lösung. Die Aufgabe findet ihre allgemeine Lösung in dem Integral

$$\int\int \frac{\sin\theta}{TT'} dJ,$$

ausgedehnt über den betreffenden Teil der Ebene. Die Betrachtung einiger besonderer Fälle wird auf bemerkenswerte Formeln für dieses Integral führen.

113. 1. Die Gesamtheit aller Tangenten der Kurve wird durch 2π gemessen, da ihre Richtungen über das Inter-

vall 0 bis 2π gleichförmig verteilt zu denken sind; die Anzahl ihrer Schnittpunkte ist also $\frac{1}{2}(2\pi)^2 = 2\pi^2$; folglich ist

$$1) \qquad \int\int \frac{\sin\theta}{TT'}\, dJ = 2\pi^2,$$

das Integral über die ganze Ebene ausserhalb der Kurve ausgedehnt.

In Anwendung der Formel auf den Kreis ist (Fig. 67)

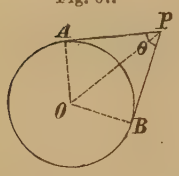
$$T = T' = r\,\mathrm{cotg}\,\frac{\theta}{2}, \quad dJ = 2\pi\, OP\,.\,d\,OP = \pi r^2 \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}\, d\theta,$$

daher thatsächlich

$$\int\int \frac{\sin\theta}{TT'}\, dJ = \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{r^2\,\mathrm{cotg}^2\frac{\theta}{2}}\, \pi r^2 \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}\, d\theta = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta = 2\pi^2.$$

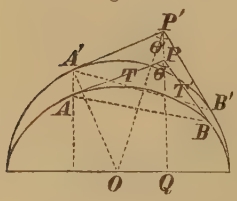
Durch Anwendung der Formel 1) auf die Ellipse ergiebt sich der Wert eines bestimmten Integrals, dessen Auswertung auf anderem Wege nicht so einfach wäre.

Fig. 67.



Mit Zuhilfenahme des über der grossen Axe als Durchmesser verzeichneten Kreises (Fig. 68) ergeben sich, wenn x, y die Koordinaten des betrachteten Punktes P sind, für die Koordinaten des zugeordneten Punktes P' die Werte x, $\frac{a}{b}y$; ferner ist

Fig. 68.



$$P'A'\,.\,P'B' = P'A'^2 = \frac{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}{b^2},$$

$$\sin\frac{\theta'}{2} = \frac{a}{OP'} = \frac{ab}{\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2}},$$

$$\sin\theta' = \frac{2ab\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}}{b^2x^2 + a^2y^2},$$

daher

$$\Delta A'B'P' = \frac{a}{b}\,\frac{(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)^{\frac{3}{2}}}{b^2x^2 + a^2y^2}.$$

Nun ist

$$\Delta ABP = \frac{1}{2} TT' \sin\theta = \frac{b}{a} \Delta A'B'P',$$

daher mit Benutzung des eben für $\Delta A'B'P'$ gefundenen Wertes

$$\frac{\sin\theta}{TT'} = \frac{\sin^2\theta}{2} \frac{b^2x^2 + a^2y^2}{(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)^{\frac{3}{2}}};$$

weiter ergiebt sich aus

$$tang\,\theta = \frac{2\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}}{x^2 + y^2 - a^2 - b^2}$$

(s. Nr. 107, Gleichung 1) der Wert für $\sin^2\theta$, nämlich

$$\sin\,\theta = \frac{4(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)}{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2},$$

so dass schliesslich

$$\frac{\sin\theta}{TT'} = \frac{2(b^2x^2 + a^2y^2)}{\{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2\}\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}}.$$

Es ist also

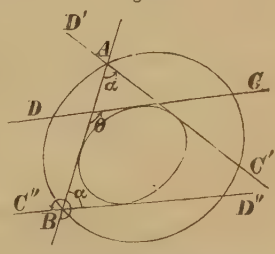
$$\int\int \frac{b^2x^2 + a^2y^2}{\{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2\}\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}}\, dx\, dy = \pi^2,$$

wenn die Integration über die ganze Ebene ausserhalb der Ellipse ausgedehnt wird.

114. 2. Die Schnittpunkte auf jenem Teile der Ebene zu zählen, welcher zwischen der gegebenen und einer sie umschliessenden Kurve enthalten ist, längs welcher θ einen konstanten Wert α besitzt.

Betrachtet man irgend eine Tangente AB (Fig. 69) der inneren Kurve, so erkennt man leicht, dass sie innerhalb der Strecke AB von allen jenen Tangenten geschnitten wird, welche mit ihr wie CD einen Winkel θ einschliessen, der zwischen den Grenzen α und $2\pi - \alpha$ enthalten ist; die Anzahl solcher Tangenten ist $2\pi - \alpha - \alpha = 2(\pi - \alpha)$, die Anzahl der Tangenten AB ist 2π, daher die Anzahl der auf die ringförmige Fläche fallenden Schnittpunkte $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 2(\pi - \alpha) = 2\pi(\pi - \alpha)$.

Fig. 69.



Folglich ist

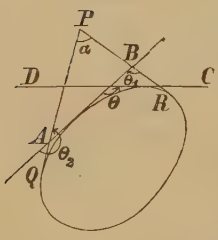
$$2) \qquad \int\int \frac{\sin\theta}{TT'}\, dJ = 2\pi(\pi - \alpha),$$

wenn die Integration über die Ringfläche ausgedehnt wird.

115. 3. Die Schnittpunkte auf jenem Teile der Ebene zu zählen, welcher von der Kurve und zwei festen Tangenten derselben, die den Winkel α bilden, eingeschlossen wird.

Ist AB (Fig. 70) eine der Tangenten, welche das von der Kurve und den festen Tangenten PQ, PR gebildete gemischtlinige Dreieck durchschneidet, so wird sie innerhalb der Strecke AB von jeder Tangente getroffen, welche mit ihr wie CD einen Winkel θ einschliesst, der zwischen den Grenzen θ_1 und θ_2 enthalten ist. Die Anzahl solcher Tangenten ist aber $\theta_2 - \theta_1 = \pi - \alpha$, die Anzahl der Tangenten AB ist $\pi - \alpha$, daher die Anzahl der Schnittpunkte in PQR gleich $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)^2$. Mithin ist

Fig. 70.

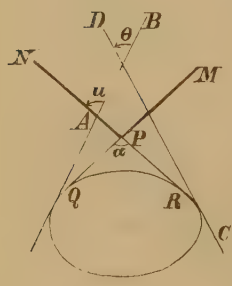


$$3) \qquad \int\int \frac{\sin\theta}{TT'}\, dJ = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)^2,$$

die Integration auf das oben bezeichnete Gebiet ausgedehnt.

116. 4. Die Anzahl der Schnittpunkte in dem unendlichen von zwei festen Tangenten gebildeten Winkelraume zu zählen.

Fig. 71.



MPQ, NPR (Fig. 71) sind die festen Tangenten, ihr Winkel α, MPN der unendliche Winkelraum, auf welchem die Schnittpunkte zu zählen sind. Wir betrachten eine Tangente AB, welche diesen Winkelraum durchsetzt; sie wird innerhalb desselben von jeder Tangente getroffen, die wie CD einen Winkel θ mit ihr einschliesst, welcher kleiner ist als Winkel u. Die Anzahl solcher Tangenten ist u, die Anzahl der Tangenten AB von der angenommenen Richtung du, die Anzahl der

gegenseitigen Schnittpunkte $u\,du$, folglich die Anzahl aller Schnittpunkte von der bezeichneten Art $\int_0^\alpha u\,du = \frac{1}{2}\alpha^2$. Demnach ist

$$4) \qquad \int\int \frac{\sin\theta}{TT'}\,dJ = \frac{1}{2}\alpha^2,$$

wenn das Integral über den unendlichen Winkelraum MPN ausgedehnt wird.

117. **Problem XL.** *Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass zwei in beliebigen Richtungen gezogene Tangenten einer Ellipse innerhalb des dem Axenrechteck umschriebenen Kreises, beziehungsweise innerhalb des Axenrechteckes selbst sich schneiden.*

Lösung. Die Anzahl aller Tangentenschnittpunkte ist nach Nr. 113 gleich $2\pi^2$.

Da θ längs des dem Axenrechteck umschriebenen Kreises den konstanten Wert $\frac{\pi}{2}$ hat, so fallen auf die von dem Kreise und der Ellipse begrenzte ringförmige Fläche nach Nr. 114 ... $2\pi\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \pi^2$ Schnittpunkte. Demnach ist die erste der fraglichen Wahrscheinlichkeiten

$$p_1 = \frac{1}{2}.$$

Der Umfang des Axenrechtecks zerfällt in vier Paare fester Tangenten, deren jedes den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ einschliesst; in eines der vier gemischtlinigen Dreiecke, welche die Ellipse von dem Rechtecke abschneidet, fallen nach Nr. 115 $\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi^2$, in alle zusammen $\frac{1}{2}\pi^2$ Schnittpunkte. Die dem zweiten Ereignis zukommende Wahrscheinlichkeit ist also

$$p_2 = \frac{1}{4}.$$

118. **Theorem XII.** *Die Dichte der Schnittpunkte aller Tangenten, welche an eine geschlossene konvexe Kurve in beliebigen Punkten derselben geführt werden können, ist in irgend einem Punkte ausserhalb der Kurve ausgedrückt durch* $\frac{\varrho\varrho'}{TT'}\sin\theta$,

wenn θ der Winkel, unter welchem sich die Kurve aus dem Punkte projiziert, T, T' die Längen der von ihm an die Kurve geführten Tangenten und ϱ, ϱ' die Krümmungshalbmesser in den Berührungspunkten dieser Tangenten sind.

Beweis. Die Begründung ergiebt sich aus dem Satze Nr. 111. Formel α) giebt dort als Anzahl der auf den um den betrachteten Punkt P beschriebenen Kreis vom Inhalte dJ fallenden Schnittpunkte den Ausdruck

$$\frac{1}{\vartheta^2} \frac{\sin\theta}{TT'} dJ.$$

Dort war der Kontingenzwinkel ϑ konstant; hier aber ist er veränderlich und hat im Punkte A (Fig. 66a) und dessen unmittelbarer Umgebung den Wert

$$\vartheta = \frac{ds}{\varrho},$$

im Punkte B und seiner unmittelbaren Nähe den Wert

$$\vartheta' = \frac{ds}{\varrho'}.$$

In dem obigen Ausdrucke ist also an Stelle von ϑ^2 zu setzen

$$\vartheta\,\vartheta' = \frac{ds^2}{\varrho\,\varrho'},$$

wodurch er sich verwandelt in

$$\frac{1}{ds^2} \frac{\varrho\,\varrho'}{TT'} \sin\theta\, dJ.$$

Daraus folgt die Dichte — mit Hinweglassung des konstanten Faktors ds^2 —

1) $$\delta = \frac{\varrho\,\varrho'}{TT'} \sin\theta.$$

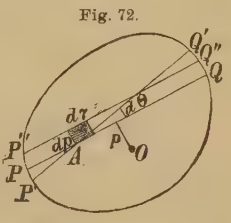
Zu einer bemerkenswerten Integralformel führt die Zählung aller Schnittpunkte; die Anzahl derselben beträgt, wenn L die Länge der Kurve bezeichnet, offenbar $\frac{1}{2} L^2$, so dass

2) $$\int\int \frac{\varrho\,\varrho'}{TT'} \sin\theta\, dJ = \frac{1}{2} L^2,$$

wenn die Integration auf die unendliche Ebene ausserhalb der Kurve ausgedehnt wird.

119. **Theorem XIII.** *Die Summe der Würfel über den Sehnen, welche auf allen beliebig gezogenen Sekanten einer geschlossenen konvexen Kurve abgeschnitten werden, wird durch das dreifache Quadrat des Inhalts der von der Kurve begrenzten Fläche gemessen.*

Beweis. Die Gesamtheit der Sekanten ist analytisch dargestellt durch die zweifach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit der Variabeln p, θ, wobei p die Länge des Lotes, welches von einem innerhalb der Kurve gelegenen Pol O (Fig. 72) auf die Sekante gefällt wird, und θ die Neigung dieses Lotes gegen eine feste Gerade bedeutet; die Grenzen von θ sind 0 und 2π, jene von p durch die Form der Kurve bedingt. Bezeichnet C die Länge der Sehne PQ, welche der Wertverbindung p, θ entspricht, so ist die oben definierte Summe durch das Integral



$$\iint C^3 \, dp \, d\theta$$

ausgedrückt, welches über das ganze Gebiet der beschriebenen Mannigfaltigkeit auszudehnen ist. Die folgende Betrachtung wird zu einer zweiten geometrischen Bedeutung dieses Integrals und dadurch zu seinem Werte führen.

Um die Anzahl der Verbindungslinien willkürlich in der Fläche der Kurve angenommener Punktepaare zu ermitteln, gehen wir von einem solchen Punktepaare A, B aus, halten zunächst einen Punkt desselben, A, fest und führen durch denselben eine Sehne PQ, deren Lot die Neigung θ hat, dann eine zweite Sehne $P'Q'$, welche mit der ersten den unendlich kleinen Winkel $d\theta$ einschliesst. Die Anzahl der Verbindungslinien AB, die durch A gehen und deren Richtungen zwischen PQ und $P'Q'$ enthalten sind, wird ausgedrückt durch

$$\measuredangle APP' + \measuredangle AQQ' = \frac{1}{2}\{r^2 + (C-r)^2\}\, d\theta,$$

wenn man $AP = r$, daher $AQ = C - r$ setzt.

Ändert nun auch A seine Lage auf dem Element der Fläche, welches von PQ und einer dazu parallelen Sehne $P''Q''$

im Abstande dp eingeschlossen wird, so wird die Anzahl der Verbindungslinien AB, deren Richtungen zwischen jenen von PQ und $P'Q'$ sich befinden, gleich

$$\alpha) \qquad \frac{1}{2} dp\, d\theta \int_0^C \{r^2 + (C-r)^2\}\, dr = \frac{1}{3} C^3\, dp\, d\theta;$$

daher endlich die Anzahl aller Verbindungslinien AB, wenn man der Sehne PQ alle zulässigen Entfernungen von O und dem Lote alle Richtungen erteilt,

$$\frac{1}{3} \int\int C^3\, dp\, d\theta.$$

Andererseits aber ist diese Anzahl identisch mit der Anzahl aller Punktepaare, welche innerhalb der Kurve angenommen werden können, daher gleich J^2, wenn J den Inhalt der Kurve bezeichnet. Mithin hat man die Beziehung

$$1) \qquad \frac{1}{3} \int\int C^3\, dp\, d\theta = J^2,$$

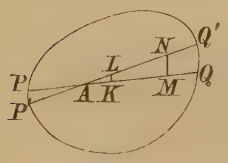
woraus die aufgestellte Behauptung

$$2) \qquad \int\int C^3\, dp\, d\theta = 3J^2$$

resultiert.*

120. **Problem XLI.** *Innerhalb einer geschlossenen konvexen Kurve werden zwei Punkte willkürlich angenommen und durch eine Sehne verbunden, welche dadurch in drei Abschnitte zerfällt. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass aus diesen Abschnitten ein Dreieck gebildet werden kann.*

Fig. 73.



Lösung. Wir betrachten, wie bei dem Beweise des vorigen Theorems, zunächst den einen Punkt A als fest, führen durch denselben zwei Sehnen PQ, $P'Q'$ (Fig. 73), welche den unendlich kleinen Winkel $d\theta$ einschliessen, und suchen die günstigen Lagen des zweiten

* Diesen Satz hat Crofton 1869 der Pariser Akademie mitgeteilt (s. Comptes rendus, 1869, pag. 1469). Einen analytischen Beweis hat Serret für denselben gegeben in den Annales scientif. de l'école norm. super. 1869, pag. 177 sq. (Vergl. Note zu Nr. 100.)

Punktes B innerhalb der von diesen Sehnen eingeschlossenen Fläche. Zu diesem Zwecke hat man PQ in K zu halbieren, PA nach KM zu übertragen und aus A mit AK und AM die Bögen KL und MN zu beschreiben; die günstigen Lagen von B fallen in das Viereck $KMNL$, weil dann

$$PA+AB>\frac{PQ}{2},\quad AB<\frac{PQ}{2};$$

ihre Anzahl ist daher

$$\frac{1}{2}d\theta(AM^2-AK^2)=\frac{1}{2}d\theta\left\{\frac{1}{4}(AQ+AP)^2-\frac{1}{4}(AQ-AP)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}AP\cdot AQ\cdot d\theta,$$

oder, wenn wieder $PQ=C$, $AP=r$ gesetzt wird, gleich

$$\frac{1}{2}r(C-r)\,d\theta.$$

Wenn nun A seine Lage auf dem von PQ und einer dazu parallelen Sehne im Abstande dp begrenzten Flächenelement ändert, so ergiebt sich als Anzahl der diesen Lagen von A entsprechenden günstigen Fälle der Ausdruck

$$\frac{1}{2}dp\,d\theta\int_0^C r(C-r)\,dr=\frac{1}{12}C^3\,dp\,d\theta,$$

und endlich für alle Lagen von A innerhalb der Kurve

$$\frac{1}{12}\int\int C^3\,dp\,d\theta.$$

Setzt man für das Integral den in Nr. 119, Gleichung 2), gefundenen Wert ein, so hat man schliesslich als Anzahl der günstigen Fälle $\frac{1}{4}J^2$, als Anzahl der möglichen Fälle J^2, so dass die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$\omega=\frac{1}{4}$$

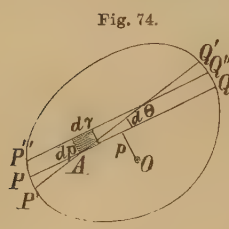
unabhängig ist von der weiteren Gestalt der Kurve.

121. **Problem XLII.** *Innerhalb einer geschlossenen konvexen Kurve werden zwei Punkte willkürlich angenommen; es ist die*

Wahrscheinlichkeit zu finden, dass eine beliebig gezogene Sekante der Kurve sie trennt.

Lösung. Die Länge der Kurve heisse L, ihr Inhalt J. Den einen Punkt, A (Fig. 74), halte man wieder fest.

Fig. 74.



Die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Punkt B zwischen die Sehnen PQ und $P'Q'$ und in der Entfernung ϱ von A zu liegen kommt, ist $\frac{\varrho\, d\varrho\, d\theta}{J}$, und die Wahrscheinlichkeit, dass die Punkte A, B bei dieser gegenseitigen Lage durch die Sekante getrennt werden, beträgt $\frac{2\varrho}{L}$. Auf alle Lagen von B zwischen den Sehnen PQ, $P'Q'$ ausgedehnt, ergiebt dies die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2}{LJ}\, d\theta \left\{ \int_0^r \varrho^2\, d\varrho + \int_0^{C-r} \varrho^2\, d\varrho \right\} = \frac{2}{3LJ} \left\{ r^3 + (C-r)^3 \right\} d\theta.$$

Um diese auf alle Lagen von A in dem Elemente $PQQ''P''$ auszudehnen, während die Richtung von AB zwischen den Richtungen von PQ und $P'Q'$ verbleibt, hat man den letzten Ausdruck mit der Wahrscheinlichkeit, dass A in das anstossende Element $dp\, dr$ fällt, d. i. mit $\frac{dp\, dr}{J}$ zu multiplizieren und das Produkt in Bezug auf r innerhalb der Grenzen 0 und $PQ = C$ zu integrieren; dadurch erhält man

$$\frac{2}{3LJ^2}\, dp\, d\theta \int_0^C \{ r^3 + (C-r)^3 \}\, dr = \frac{1}{3LJ^2}\, C^4\, dp\, d\theta.$$

Daraus endlich folgt die vollständige Wahrscheinlichkeit obigen Ereignisses für alle Punktepaare A, B, d. i.

$$\alpha) \qquad \omega = \frac{1}{3LJ^2} \int\int C^4\, dp\, d\theta,$$

die Integration auf alle Sekanten der Kurve ausgedehnt.

Die zur Berechnung von ω erforderliche Integration ist nur für gewisse Kurven durchführbar. Nachstehend zwei Beispiele davon.

122. 1. Innerhalb eines Kreises werden zwei Punkte willkürlich angenommen; die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass eine beliebig gezogene Sekante des Kreises sie trennt.

Nach Gleichung α), Nr. 121, ist

$$\omega = \frac{1}{3LJ^2}\int\int C^4\, dp\, d\theta.$$

Im vorliegenden Falle, wenn r den Halbmesser des Kreises und 2α den Winkel bezeichnet, unter welchem die Sehne C aus dem Mittelpunkte erscheint, ist

$$C = 2r\sin\alpha, \quad dp = r\sin\alpha\, d\alpha,$$

daher

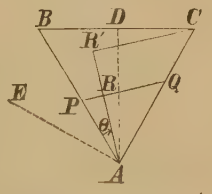
$$\omega = \frac{1}{6\pi^3 r^5}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 r^5 \sin^5\alpha\, d\alpha = \frac{16}{3\pi}\left[-\frac{5}{8}\cos\alpha + \frac{5}{48}\cos 3\alpha - \frac{1}{80}\cos 5\alpha\right]_0^{\frac{\pi}{2}},$$

d. i.

$$\omega = \frac{128}{45\pi^2}.$$

123. 2. In der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks werden zwei Punkte willkürlich angenommen; die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass eine beliebige Transversale des Dreiecks sie trennt.

Fig. 75.



Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist wieder nach Gleichung α), Nr. 121, zu rechnen.

Wird der Eckpunkt A (Fig. 75) als Pol, die Seite $AB = a$ als Anfangsrichtung angenommen, ist ferner $PQ = C$ eine beliebige Sehne, $AR = p$ das zu ihr gefällte Lot, so ergiebt sich aus der Relation

$$Cp = 2\,\Delta APQ = AP \cdot AQ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{p}{\cos\theta}\,\frac{p}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$C = \frac{p}{\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}\sin\frac{\pi}{3}.$$

Beschränkt man die Integration in Bezug auf θ auf das Intervall $-\frac{\pi}{6}$ bis $\frac{\pi}{6}$ (wobei das Lot alle Richtungen zwischen

$AE \perp AC$ und AD annimmt) und in Bezug auf p auf das Intervall von 0 bis $AR' = AC\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) = a\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$, so hat man, zufolge der Symmetrie der Figur, den sechsten Teil des Integrals in Formel α) erhalten; also ist

$$\iint C^4\,dp\,d\theta = 6\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^{a\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)} \frac{p^4}{\cos^4\theta\,\cos^4\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}\,\sin^4\frac{\pi}{3}\,dp$$

$$= \frac{27\,a^5}{40}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{\cos^4\theta}\,d\theta.$$

Nun ist

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{\cos^4\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} + \sin\frac{\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos^4\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \left[\frac{1}{2}\,\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + \frac{1}{2}\,l\cdot tang\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\,l\ 3,$$

daher weiter

$$\iint C^4\,dp\,d\theta = \frac{27\,a^5}{40}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\,l\cdot 3\right),$$

und da $L = 3a, J = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ ist, so hat man schliesslich

$$\omega = \frac{16}{27\,a^5}\cdot\frac{27\,a^5}{40}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\,l\cdot 3\right) = \frac{2}{15} + \frac{1}{10}\,l\cdot 3.$$

124. **Theorem XIV.** *Bezeichnet* p *die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig gezogene Sekante einer geschlossenen konvexen Kurve zwei innerhalb dieser willkürlich angenommene Punkte trennt, und* p_1 *die Wahrscheinlichkeit, dass die Sekante ein von*

drei innerhalb der Kurve willkürlich gewählten Punkten gebildetes Dreieck schneidet, so ist $p_1 = \frac{3}{2} p$.

Beweis. Ist p_2 die Wahrscheinlichkeit, dass die Sekante ein bestimmtes Seitenpaar trifft — offenbar ist diese Wahrscheinlichkeit für alle Seitenpaare dieselbe —, so hat man

1) $$p_1 = 3 p_2.$$

Nun ist, wenn A, B, C die drei Punkte heissen, mit der in Nr. 71 angewendeten Symbolik

$$p(AB) = p(AB, AC) + p(AB, BC) = p,$$

oder, weil $p(AB, AC) = p(AB, BC) = p_2$:

$$2 p_2 = p;$$

setzt man den Wert für p_2 aus dieser Gleichung in 1) ein, so ergiebt sich thatsächlich

2) $$p_1 = \frac{3}{2} p.$$

So erhält man für die in Rede stehende Wahrscheinlichkeit bei einem Kreise mit Zuhilfenahme des für $p\,(= \omega)$ in Nr. 122 gefundenen Wertes

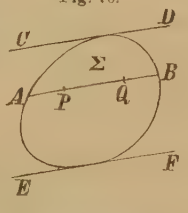
$$p_1 = \frac{64}{15\pi^2}$$

und bei einem gleichseitigen Dreieck nach Nr. 123

$$p_1 = \frac{1}{5} + \frac{3}{20} l \cdot 3.$$

125. **Problem XLIII.** *Innerhalb einer geschlossenen konvexen Kurve vom Inhalte* J *werden zwei Punkte willkürlich angenommen und durch eine Gerade verbunden. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei weitere beliebig in der Fläche der Kurve angenommene Punkte auf einerlei Seite der gedachten Geraden liegen werden?*

Fig. 76.



Lösung. P, Q (Fig. 76) seien zwei beliebig gewählte Punkte, $AB = C$ die sie verbindende Sehne; bezeichnet man die Koordinaten der letzteren mit p, θ, so wird der Gleichung α), Nr. 119, zufolge die Anzahl der Verbindungslinien PQ, deren

Argument θ zwischen den Grenzen θ und $\theta + d\theta$ liegt, für alle Lagen des Punktes P zwischen AB und einer dazu parallelen Sehne im Abstande dp ausgedrückt durch

$$\frac{1}{3} C^3 \, dp \, d\theta,$$

und da J^2 das Mass für die Anzahl aller Verbindungslinien PQ ist, so kommt einer Geraden PQ von der eben beschriebenen Beschaffenheit die Wahrscheinlichkeit

1) $$\frac{1}{3J^2} C^3 \, dp \, d\theta$$

zu.

Wenn ferner Σ den Inhalt des zu einer Seite von AB liegenden Segmentes bedeutet, so ist

2) $$\frac{\Sigma^2}{J^2}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden weiteren, willkürlich anzunehmenden Punkte R, S in dieses Segment fallen.

Integriert man das Produkt aus 1) und 2) für alle Lagen der Sehne AB zwischen den Tangenten EF, CD (also bei konstantem θ), so erhält man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Punkte R, S bei dieser Richtung von PQ beide über PQ liegen, welcher die Wahrscheinlichkeit, dass beide unter PQ sich befinden, offenbar gleichkommt. Um daher alle Fälle einzubeziehen, hat man für Σ beständig das zur selben Seite von AB gelegene Segment zu nehmen und den so gewonnenen Ausdruck zu verdoppeln.

Die verlangte Wahrscheinlichkeit ist also

3) $$\Pi = \frac{2}{3J^4} \int\int C^3 \Sigma^2 \, dp \, d\theta,$$

die Integration über alle Lagen der Sehne ausgedehnt und Σ während der Integration immer zur selben Seite der Sehne genommen.*

---

* Wird das andere durch die Sehne AB abgeschnittene Segment mit Σ' bezeichnet, so lässt sich Π auch in folgender Form darstellen:

α) $$\Pi = \frac{1}{3J^4} \left(\int\int C^3 \Sigma^2 \, dp \, d\Theta + \int\int C^3 \Sigma'^2 \, dp \, d\Theta \right).$$

Als Anwendung möge der Kreis dienen. Hier ist, wenn r den Halbmesser und 2α den Winkel bezeichnet, unter welchem die Sehne $AB = C$ aus dem Mittelpunkte erscheint:

$$C = 2r \sin\alpha,$$
$$\Sigma = r^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha),$$
$$dp = r \sin\alpha \, d\alpha,$$

$$\iint C^3 \Sigma^2 \, dp \, d\theta = 8r^8 \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} (\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)^2 \sin^4\alpha \, d\alpha \, d\theta$$

$$= 8\pi r^8 \int_0^{\pi} (\alpha^2 - 2\alpha \sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha)\sin^4\alpha \, d\alpha.$$

Durch partielle Integration findet man leicht

$$\int_0^{\pi} \alpha^2 \sin^4\alpha \, d\alpha = \frac{1}{8}\pi^3 - \frac{15}{64}\pi,$$

$$\int_0^{\pi} 2\alpha \sin^5\alpha\cos\alpha \, d\alpha = -\frac{5}{48}\pi,$$

endlich

$$\int_0^{\pi} \sin^6\alpha\cos^2\alpha \, d\alpha = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\alpha \, d\alpha - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\alpha \, d\alpha = \frac{15}{384}\pi;$$

für den Kreis ist also

$$4) \qquad \iint C^3\Sigma^2 \, dp \, d\theta = \pi^2 r^8 \left(\pi^2 - \frac{35}{48}\right).$$

Setzt man dies in Formel 3) ein, so ergiebt sie

$$\Pi = \frac{2}{3} - \frac{35}{72\pi^2}.$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass die Punkte R, S zu verschiedenen Seiten der Geraden PQ liegen, ergiebt sich durch analoge Betrachtungen der Wert

$$\beta) \qquad \Pi' = \frac{2}{3J^4} \iint C^3 \Sigma\Sigma' \, dp \, d\Theta.$$

Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ist

$$\Pi + \Pi' = \frac{1}{3J^4} \iint C^3 (\Sigma + \Sigma')^2 \, dp \, d\Theta = \frac{1}{3J^2} \int\int C^3 \, dp \, d\Theta,$$

d. i. mit Rücksicht auf Gleichung 2), Nr. 119:

$$\Pi + \Pi' = 1.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden letztangenommenen Punkte zu verschiedenen Seiten der Geraden fallen, welche die beiden erstangenommenen verbindet, ist daraus gleich

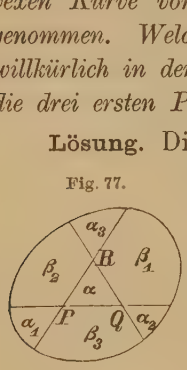
$$\Pi' = \frac{1}{3} + \frac{35}{72\pi},$$

d. i. abgekürzt $\Pi = 0{,}61741$, $\Pi' = 0{,}38259$.

126. **Problem XLIV.** *Innerhalb einer geschlossenen konvexen Kurve vom Inhalte J werden drei Punkte beliebig angenommen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein vierter willkürlich in der Fläche gewählter Punkt ausserhalb des durch die drei ersten Punkte bestimmten Dreiecks fallen wird?*

Lösung. Die ersten drei Punkte seien P, Q, R (Fig. 77).

Fig. 77.



Durch die sie verbindenden Sehnen wird die Fläche der Kurve in sieben Teile zerlegt. Bezeichnen $p_\alpha, p_{\alpha_1} \ldots, p_{\beta_1} \ldots$ die Wahrscheinlichkeiten, dass der vierte Punkt, S, in die betreffenden Teile zu liegen kommt, so ist die verlangte Wahrscheinlichkeit:

1) $$\Pi = p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + p_{\alpha_3} + p_\beta + p_{\beta_2} + p_{\beta_3}.$$

Man überzeugt sich aber leicht, dass

2) $$p_{\alpha_1} = p_{\alpha_2} = p_{\alpha_3} = p_\alpha, \quad p_{\beta_1} = p_{\beta_2} = p_{\beta_3}$$

ist. Denn während p_{α_3} die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass das Dreieck PQS den Punkt R einschliesst, ist p_α die Wahrscheinlichkeit, dass das Dreieck PQR den Punkt S aufnimmt, daher offenbar

$$p_{\alpha_3} = p_\alpha \ldots$$

Ferner kann p_{β_2} als Wahrscheinlichkeit dafür angesehen werden, dass die Spitze des Dreiecks PQS links von der Spitze des Dreiecks PQR sich befindet, p_{β_1} dagegen als Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Spitze des Dreiecks PQS, von PQ aus gesehen, rechts von der Spitze des Dreiecks PQR angeordnet ist; daher thatsächlich

$$p_{\beta_2} = p_{\beta_1} \ldots$$

Mit Rücksicht auf 2) kann also für den Ausdruck 1) geschrieben werden

3) $$\Pi = 3\,(p_{\alpha_1} + p_{\beta_1}).$$

Andererseits ist aber

$$p_\alpha + p_\alpha + p_{\beta_1} + p_{\beta_2} = 2\,(p_{\alpha_1} + p_{\beta_1})$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Punkte R und S auf einerlei Seite von PQ liegen, folglich nach Gleichung 3), Nr. 125:

4) $$2\,(p_{\alpha_1} + p_{\beta_1}) = \frac{2}{3J^4}\int\int C^3\,\Sigma^2\,dp\,d\theta.$$

Durch Vergleichung von 3) mit 4) erhält man endlich

5) $$\Pi = \frac{1}{J^4}\int\int C^3\,\Sigma^2\,dp\,d\theta,$$

wobei über die Integration dieselben Bemerkungen gelten, wie bei Gleichung 3), Nr. 125.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der vierte Punkt S in das Dreieck PQR aus den drei ersten Punkten fällt, ist daraus

6) $$\Pi' = 1 - \Pi.$$

Auf den Kreis angewendet, erhält man mit dem Gleichung 4), Nr. 125, gefundenen Werte des Doppelintegrals

$$\Pi = 1 - \frac{35}{48\pi^2}, \quad \Pi' = \frac{35}{48\pi^2}.$$

127. **Problem XLV.** *Innerhalb einer geschlossenen konvexen Kurve werden vier Punkte willkürlich angenommen. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass sie ein konvexes Viereck bilden.*

Lösung. Sollen die vier Punkte ein nichtkonvexes, d. i. ein Viereck mit einspringendem Winkel bilden, so muss einer davon, gleichgiltig welcher, in das durch die drei anderen bestimmte Dreieck fallen; wird die betreffende Wahrscheinlichkeit, jedoch für einen bestimmten der vier Punkte, mit Π' bezeichnet, so ist die vollständige Wahrscheinlichkeit, dass die vier Punkte ein nichtkonvexes Viereck bestimmen:

$$Q = 4\Pi',$$

oder wenn für Π' der aus Nr. 126, Gleichung 5) und 6), gefundene Wert eingesetzt wird:

1) $$Q = 4\left(1 - \frac{1}{J^4}\int\int C^3\,\Sigma^2\,dp\,d\theta\right);$$

daraus die Wahrscheinlichkeit eines konvexen Vierecks

2) $$P = 1 - Q = \frac{4}{J^4}\int\int C^3\,\Sigma^2\,dp\,d\theta - 3.$$

Über die Ausdehnung der Integration vergl. Nr. 125.

So ergiebt sich mit Benutzung des Integralwerts Gleichung 4), Nr. 125 die Wahrscheinlichkeit, dass vier in der Fläche eines Kreises beliebig angenommene Punkte ein konvexes Viereck bilden:

$$P = 1 - \frac{35}{12\pi^2}.$$

Anmerkung. Die in Nr. 126 und 127 für den Kreis abgeleiteten Wahrscheinlichkeitswerte behalten ihre Geltung auch für die Ellipse, indem diese mit den in ihrer Fläche willkürlich angenommenen Punkten als Parallelprojektion eines Kreises angesehen werden kann, in dessen Fläche Punkte willkürlich angenommen sind. Jedem möglichen und günstigen Fall der einen Figur entspricht ein analoger Fall in der anderen.

2. Gerade im Raume.

128. Wie bei Geraden in der Ebene können auch bei Geraden im Raume drei Fälle der Willkür unterschieden werden.

1. Gegeben ist ein Punkt; durch denselben soll eine Gerade gezogen werden. Die Richtung der Geraden ist unbestimmt, kann also willkürlich angenommen werden.

Jede derartige Gesamtheit von Geraden kann auf eine Gesamtheit von Punkten zurückgeführt werden, indem man die Geraden durch eine Kugelfläche schneidet, welche den gegebenen Punkt zum Mittelpunkte hat: die erste Gesamtheit kann dann durch die zweite gemessen werden. Daraus folgen unmittelbar die Sätze:

Die Anzahl aller Geraden im Raume, welche durch einen gegebenen Punkt gezogen werden können, hat 2π zum Masse.

Die Anzahl aller Strahlen im Raume, welche man aus einem gegebenen Punkte führen kann, wird durch 4π gemessen.

Ein Teil einer dieser Gesamtheiten wird im allgemeinen durch eine Kegelfläche begrenzt und durch den Inhalt jener Figur gemessen, welche diese Kegelfläche aus der Kugeloberfläche ausschneidet, wobei der Halbmesser der letzteren als Einheit zu dienen hat.

2. Gegeben ist eine Richtung; es soll eine Gerade von dieser Richtung angegeben werden. Die Lage derselben st unbestimmt, kann also beliebig angenommen werden.

Jede derartige Gesamtheit von Geraden kann auf eine Gesamtheit von Punkten zurückgeführt werden, welche man erhält, wenn man die Geraden durch eine zu ihrer Richtung normale Ebene schneidet: beide Gesamtheiten lassen sich durch dasselbe Mass ausdrücken. Daraus folgt der Satz:

Die Anzahl aller Geraden im Raume, welche in gegebener Richtung innerhalb gegebener Grenzen gezogen werden können, wird durch den Inhalt des Normalschnittes der sie einschliessenden Cylinderfläche gemessen.

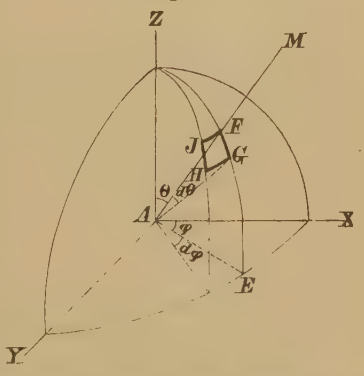
3. Im Raume eine Gerade zu ziehen. Richtung und Lage sind unbestimmt, beide willkürlich anzunehmen.

Die Gesamtheit solcher unbeschränkt willkürlicher Geraden hat man als ein räumliches Geradensystem sich vorzustellen, bestehend aus Bündeln der zweiten Art, welche allen Geraden eines Bündels der ersten Art der Reihe nach parallel sind.

Mit der Messung einer derartigen Gesamtheit beschäftigt sich der nachstehende Satz.

129. **Theorem I.** *Die Anzahl aller willkürlichen Geraden, welche eine geschlossene konvexe Fläche schneiden, wird durch deren Oberfläche gemessen.*

Fig. 78.



Beweis. Wir denken uns eines der Bündel paralleler Geraden, aus welchen die in Rede stehende Gesamtheit sich zusammensetzt, herausgehoben; seine Richtung werde durch die Gerade AM (Fig. 78) bezeichnet. Dieses Bündel wird durch die die Fläche umhüllende, AM parallele Cylinderfläche begrenzt und durch den Inhalt Ω des Normalschnittes dieser Cylinderfläche gemessen.

Als Winkelkoordinaten der Richtung AM wählen wir Winkel $ZAM = \theta$ und den Neigungswinkel der Ebene ZAM

gegen die Ebene ZAX, d. i. den Winkel $XAE = \varphi$. Die Anzahl der Richtungen, deren Winkelkoordinaten zwischen den Grenzen θ und $\theta + d\theta$ einer- und φ und $\varphi + d\varphi$ andererseits liegen, wird durch den Inhalt des Vierecks $FGHJ$ auf der aus A mit der Längeneinheit beschriebenen Kugelfläche gemessen, welches von den zu φ und $\varphi + d\varphi$ gehörigen Meridianen und den zu θ und $\theta + d\theta$ gehörigen Parallelkreisen eingeschlossen wird; bezeichnen wir diesen Inhalt mit $\mathfrak{F}$, den Inhalt der Projektion des Vierecks auf die Ebene XAY mit $\mathfrak{F}'$, so ist

$$\mathfrak{F}' = \mathfrak{F} \cos\theta,$$

und da weiter

$$\mathfrak{F}' = \sin\theta \, d\varphi \, d(\sin\theta) = \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

so folgt

$$\mathfrak{F} = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Die Anzahl der Geraden aller Parallelbündel, deren Richtungen in das bezeichnete Elementargebiet fallen, ist demnach ausgedrückt durch

$$\Omega \mathfrak{F} = \Omega \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

und die Anzahl aller Geraden, welche die gegebene Fläche schneiden, durch

$$1) \qquad \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \Omega \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{\pi}{2} O,$$

da alle Richtungen erschöpft werden, wenn man θ und φ zwischen den Grenzen 0 und π variieren lässt. O bedeutet die Oberfläche. Mit Unterdrückung des konstanten Faktors $\frac{\pi}{2}$ kann also die besprochene Anzahl

$$2) \qquad N = O$$

gesetzt werden.

Anmerkung. Der in Gleichung 1) ausgesprochene Satz ist ein besonderer Fall des allgemeinen Satzes über Komplanation von Oberflächen, den Cauchy im XIII. Bande der Comptes rendus* ohne Begründung mitgeteilt hat und welcher — der von uns gewählten Bezeichnung angepasst —

* Vergl. Anmerkung zu Nr. 79.

lautet: „Bezeichnet θ den Winkel, welchen eine beliebige Gerade AM mit einer festen Axe AZ bildet; φ den Winkel, den die Ebene ZAM mit einer festen Ebene ZAX einschliesst; O eine Summe mehrerer ebener oder krummer Oberflächen; P die Summe der absoluten Werte der Projektionen der einzelnen Elemente von O auf eine zu AM senkrechte Ebene, so ist

$$O = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} P \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.“$$

Zum Zwecke des Beweises genügt es, eine ebene Fläche von beliebiger Begrenzung zu betrachten und normal zu AZ vorauszusetzen. Bezeichnet O ihren Inhalt, so ist

$\alpha)$ $$P = O \cos\theta,$$

daher

$\beta)$ $$\int\int P \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \int\int O \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\varphi;$$

die Integration soll in Bezug auf θ zwischen den Grenzen $-\pi$ und π, in Bezug auf φ zwischen 0 und π, jedoch für die absoluten Werte von P, d. i. wegen $\alpha)$, für die absoluten Werte von $\cos\theta$ ausgeführt werden. Nun erlangt aber $\cos\theta$ zwischen den auf θ bezüglichen Integrationsgrenzen jeden numerischen Wert viermal und alle verschiedenen Werte zwischen 0 und 1, wenn θ die Werte von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ durchläuft; man hat also rechts in Bezug auf θ zwischen diesen Grenzen zu integrieren und das Resultat zu vervierfachen, so dass unter den gestellten Bedingungen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} P \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 4O \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\pi} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi O \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d(\sin\theta) = 2\pi O,$$

woraus

$$O = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} P \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Die Ausdehnung des Satzes auf eine beliebige krumme, offene oder geschlossene Oberfläche bietet keine Schwierigkeit dar.

Ein besonderer Fall ergiebt sich, wenn die Oberfläche konvex und geschlossen ist. Die Summe der absoluten Werte der Projektionen aller Elemente der Oberfläche auf der zu AM normalen Ebene ist dann gleich dem doppelten Inhalt 2Ω des Normalschnittes der projizierenden Cylinderfläche, daher

$$O = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \Omega \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

oder, da bei der durch die Integrationsgrenzen für θ vorgezeichneten Drehung von AM die Projektion Ω jeden ihrer Werte zweimal und alle verschiedenen Werte innerhalb der Grenzen 0 und π erlangt:

$$O = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \Omega \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

womit der oben bei Gleichung 1) in Anwendung gebrachte Satz erwiesen ist.

130. **Problem I.** *Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass an einen gegebenen Kreiskegel parallel zu einer willkürlich angenommenen Richtung Tangentialebenen gelegt werden können.*

Lösung. Führt man durch den Scheitel des Kegels, dessen Erzeugende mit der Kegelaxe den Winkel α einschliessen mögen, eine Parallele zu der angenommenen Richtung, so giebt es keine Tangentialebene, wenn diese Parallele innerhalb des Kegels sich befindet; die Wahrscheinlichkeit hierfür kommt gleich dem Quotienten aus der Oberfläche des Kugelsegments, welches die Kegelfläche aus einer aus ihrem Scheitel beschriebenen Kugelfläche ausschneidet, dividiert durch die halbe Kugeloberfläche, also

$$1) \qquad q = \frac{4\pi \sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\pi} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$2) \qquad p = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

131. **Problem II.** *Durch einen gegebenen Punkt wird eine Gerade willkürlich gezogen; die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass sie mit einer festen, durch den gegebenen Punkt laufenden Axe einen Winkel zwischen den Grenzen α und $\alpha + d\alpha$ einschliesst.*

Lösung. Das im vorigen Problem berechnete q drückt die Wahrscheinlichkeit aus, dass die durch den Scheitel des Kegels geführte Gerade mit seiner Axe einen Winkel kleiner als α bildet; demnach ist die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$\omega = dq = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} d\frac{\alpha}{2} = \sin \alpha \, d\alpha.$$

132. **Problem III.** *Auf der nördlichen Halbkugel werden zwei Punkte willkürlich bezeichnet; es ist die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass ihr Abstand 90^0 des grössten Kreises überschreitet.*

Lösung. Der eine der beiden Punkte, P, habe die Poldistanz α; die Wahrscheinlichkeit hierfür ist nach Nr. 131 gleich $\omega = \sin \alpha \, d\alpha$. Legt man zu P als Pol den grössten Kugelkreis, so schneidet derselbe von der nördlichen Halbkugel ein Zweieck mit dem Winkel α ab, und nur dann, wenn der zweite Punkt, Q, in dieses Zweieck fällt, ist den Bedingungen der Aufgabe entsprochen; die Wahrscheinlichkeit einer solchen Lage von Q ist $\frac{\alpha}{\pi}$, daher die vollständige zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit des obigen Ereignisses

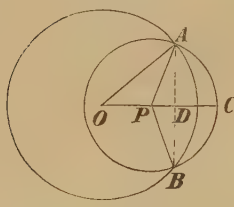
$$p = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha \sin \alpha \, d\alpha = \frac{1}{\pi}.$$

133. **Problem IV.** *Innerhalb einer gegebenen Kugel wird ein Punkt willkürlich angenommen und aus demselben ein Strahl von gegebener Länge in willkürlicher Richtung gezogen. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass der Strahl die Kugeloberfläche schneidet.*

Lösung. Der Mittelpunkt der gegebenen Kugel sei O (Fig. 79, S. 172), r ihr Halbmesser, a die gegebene Länge. Angenommen, der beliebig bezeichnete Punkt falle in die Entfernung x, von O aus gemessen, z. B. nach P; die

bezügliche Wahrscheinlichkeit ist $\frac{4\pi x^2 dx}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r^3} x^2 dx$. Um das Gebiet der günstigen Strahlen zu erhalten, beschreibe man aus P als Mittelpunkt mit dem Halbmesser a eine Kugelfläche, welche die gegebene längs des Kreises ADB schneidet; die Oberfläche des Segments ACB giebt ein Mass für die güntigen Fälle ab. Nun ist

Fig. 79.



$$segm\, ACB = 2\pi a \,.\, DC;$$

aus ΔOPA folgt $r^2 = x^2 + a^2 + 2x \,.\, PD$, daraus $PD = \frac{r^2 - x^2 - a^2}{2x}$ und $DC = a - PD = \frac{(a+x)^2 - r^2}{2x}$, so dass die Wahrscheinlichkeit eines günstigen Strahls aus P gleichkommt dem Quotienten

$$\frac{2\pi a \frac{(a+x)^2 - r^2}{2x}}{4\pi a^2} = \frac{(a+x)^2 - r^2}{4ax}.$$

Daraus ergiebt sich dann die Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses

$$p = \int_{r-a}^{r} \frac{3}{r^3} x^2 dx \cdot \frac{(a+x)^2 - r^2}{4ax} = \frac{3}{4ar^3} \int_{r-a}^{r} \{(a+x)^2 - r^2\}\, x\, dx = \frac{3}{4}\frac{a}{r} - \frac{1}{16}\left(\frac{a}{r}\right)^3.$$

Bei dieser Herleitung wurde stillschweigend $a < r$ vorausgesetzt; für den Fall $a > r$ erfährt die Rechnung eine kleine Änderung, das Resultat bleibt aber dasselbe.

Für $a = r$ erhält man $p = \frac{11}{16}$ und für $a = 2r \ldots p = 1$, wie es auch sein muss.*

134. **Problem V.** *Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass eine willkürlich gezogene Sekante einer gegebenen Kugelfläche vom Mittelpunkte derselben einen Abstand hat, der kleiner ist als eine gegebene Länge* a.

Lösung. Die Bedingung der Aufgabe wird erfüllt sein, wenn die Gerade gleichzeitig eine zweite Kugelfläche schneidet,

* Vergl. die analoge Aufgabe in der Ebene (Nr. 76).

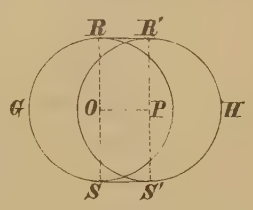
welche aus dem Mittelpunkte der ersten mit dem Halbmesser a beschrieben wird; die verlangte Wahrscheinlichkeit ist also

$$p = \frac{4\pi a^2}{4\pi r^2} = \left(\frac{a}{r}\right)^2.$$

135. **Problem VI.** *Innerhalb einer Kugel vom Halbmesser* r *wird ein Punkt willkürlich angenommen; die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die Entfernung einer beliebig gezogenen Geraden, welche die Kugeloberfläche schneidet, von dem bezeichneten Punkte kleiner ist als* r.

Lösung. Ist O (Fig. 80) der Mittelpunkt der gegebenen Kugel und fällt der willkürlich angenommene Punkt nach P, so wird den Bedingungen der Aufgabe entsprochen sein, wenn die beliebig gezogene Gerade ausser der gegebenen auch eine Kugelfläche schneidet, welche aus dem Punkte P als Mittelpunkt mit dem Halbmesser r beschrieben wird.

Fig. 80.



Setzt man $OP = x$, so ist die Wahrscheinlichkeit der vorausgesetzten Lage von P gleich

$$\frac{4\pi x^2\,dx}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r^3}x^2\,dx,$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Gerade beide Kugeloberflächen schneidet, gleich

$$\frac{4\pi r^2 - 2\pi r x}{4\pi r^2} = 1 - \frac{x}{2r};*$$

* Es ist nicht schwer, den in Nr. 88 von zwei sich schneidenden Kurven und ihren Sekanten nachgewiesenen Satz auf zwei Kugelflächen auszudehnen, welche sich schneiden. An die Stelle der Kurvenlängen L, L' treten die Oberflächen O, O', an die Stelle der endlosen, die Kurven umspannenden Saite tritt eine die Kugeln umhüllende Fläche, welche bei gleichen Kugeln, wie im obigen Beispiel, aus den Halbkugeln RGS, $R'HS'$ und der Cylinderfläche $RSS'R'$, bei ungleichen Kugeln aus zwei Kugelsegmenten und dem Mantel eines Kegelstutzes besteht. Wird die Oberfläche dieser umhüllenden Fläche wieder mit Y bezeichnet, so lautet der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Gerade, welche O trifft, auch O' schneiden wird:

daraus ergiebt sich die vollständige Wahrscheinlichkeit für das fragliche Ereignis, nämlich

$$p = \frac{3}{r^3}\int_0^r \left(1 - \frac{x}{2r}\right) x^2\, dx = \frac{5}{8}.*$$

Drittes Kapitel.

Willkürlich gelegte Ebenen.

136. Eine Ebene ist „willkürlich gelegt“ im weiteren Sinne, wenn die Bedingungen, welchen sie zu entsprechen hat, zu ihrer Bestimmung nicht ausreichen; sie ist „willkürlich gelegt“ im engeren Sinne, wenn sie an keine Bedingung geknüpft war. Bei Ebenen erster Art können je nach den gestellten Bedingungen verschiedene Fälle unterschieden werden, von welchen die wichtigsten nachstehend zusammengestellt sind.

1. Gegeben ist eine Gerade; durch dieselbe soll eine Ebene gelegt werden. Da die Stellung einer Ebene durch zwei unendlich ferne Punkte bestimmt, hier aber nur einer davon gegeben ist, so bleibt der andere willkürlich anzunehmen.

Jede derartige Gesamtheit von Ebenen kann auf eine Gesamtheit von Geraden zurückgeführt werden, die durch einen gegebenen Punkt gehen, indem man die Ebenen durch eine zu der gegebenen Geraden senkrechte Ebene schneidet. Daraus folgt u. a.:

$\frac{O + O' - Y}{O}$. Im obigen Falle ist $O = O' = 4\pi r^2$, $Y = 4\pi r^2 + 2\pi r x$, womit der dort hingeschriebene Ausdruck gerechtfertigt erscheint.

* Vergl. die analoge Aufgabe in der Ebene (Nr. 90).

Die Anzahl aller Ebenen, welche durch eine gegebene Gerade gelegt werden können, wird durch 2π, die Anzahl aller Halbebenen durch 4π gemessen.

2. Gegeben ist ein Punkt; durch denselben ist eine Ebene zu legen. Hier ist die Stellung der Ebene völlig unbestimmt und daher willkürlich anzunehmen.

Jede derartige Gesamtheit von Ebenen kann auf eine Gesamtheit von Geraden im Raume zurückgeführt werden, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, indem man zu den Ebenen in dem gegebenen Punkte Perpendikel errichtet. Daraus schliesst man:

Die Anzahl aller Ebenen, welche durch einen gegebenen Punkt gelegt werden können, hat 2π zum Masse.

3. Gegeben ist eine Ebene; eine ihr parallele Ebene anzugeben. Hier ist die Stellung bestimmt, dagegen die Lage der Ebene unbestimmt und beliebig anzunehmen.

Jede derartige Gesamtheit von Ebenen kann auf eine Gesamtheit von Punkten zurückgeführt werden, welche man erhält, wenn man die Ebenen durch eine gemeinsame Normale schneidet. Daraus folgt:

Die Anzahl aller Ebenen von gegebener Stellung und zwischen gegebenen Grenzen wird durch den senkrechten Abstand der Grenzebenen ausgedrückt.

4. Bei einer „unbeschränkt willkürlichen" Ebene ist weder Stellung noch Lage bestimmt, beides ist beliebig anzunehmen. Eine derartige Gesamtheit von Ebenen kann man sich aufgelöst denken in Ebenensysteme der dritten Art, welche den Ebenen eines Systems zweiter Art der Reihe nach parallel sind; von ihrer Messung handelt der nachfolgende Satz.

137. **Theorem I.** *Wenn* p *die Länge,* θ, φ *die Winkelkoordinaten des Perpendikels* bezeichnen, welches man von einem festen Punkte innerhalb einer geschlossenen konvexen Fläche zu einer ihrer Tangentialebenen fällt, so ist die Anzahl* N *aller*

* Im Sinne von Nr. 129.

willkürlich gelegten Ebenen, welche die Fläche schneiden, ausgedrückt durch das Integral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{p}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Beweis. Die Anzahl aller Ebenen, welche die gegebene Oberfläche schneiden und deren Perpendikel Winkelkoordinaten zwischen den Grenzen θ und $\theta + d\theta$, φ und $\varphi + d\varphi$ besitzen, ist im Hinblick auf die Entwickelungen von Nr. 129 ausgedrückt durch

$$p\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

Um alle Richtungen des Perpendikels einzubeziehen, hat man diesen Ausdruck in Bezug auf θ zwischen den Grenzen 0 und 2π, in Bezug auf φ zwischen den Grenzen 0 und π zu integrieren und erhält so als Anzahl aller die Fläche schneidenden Ebenen

$$N = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} p\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

Bei einer Kugel lassen sich die Ebenen in einfacher Weise zählen; ein Durchmesser wird von $2r$ Ebenen geschnitten, und da 2π die Anzahl aller Durchmesser, so ist $4\pi r$ die Anzahl aller Ebenen, welche die Kugeloberfläche schneiden; denselben Wert liefert obiges Integral.

138. **Problem I.** *Eine kreisrunde Scheibe rotiert gleichförmig und sehr rasch um den vertikalen Durchmesser. Man feuert in horizontaler Richtung einen Schuss gegen dieselbe ab, indem man einen beliebigen Punkt jener Kreisfläche anvisiert, als welche die rotierende Scheibe dem Beobachter sich darstellt. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die Scheibe getroffen wird.*

Lösung. In der zur Schussrichtung normalen Ebene, welche die Rotationsaxe enthält, wählen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem, und zwar den Scheibenmittelpunkt als Ursprung, die Rotationsaxe als Abscissenaxe. Der anvisierte und, wie wir voraussetzen, auch getroffene Punkt M dieser Ebene habe die Koordinaten x, y; die Wahrscheinlich-

keit, dass diese Annahme zutrifft, ist $\frac{dx\,dy}{\pi r^2}$, wenn r den Halbmesser der Scheibe bezeichnet.

Angenommen ferner, die Scheibenebene schliesse im Momente des Schusses mit der Koordinatenebene den Winkel θ ein, wofür $\frac{d\theta}{\pi}$ die Wahrscheinlichkeit ist, so wird die Scheibe getroffen werden, wenn der Punkt M innerhalb jener Ellipse fällt, als welche der Scheibenrand bei dieser momentanen Stellung der Scheibe auf die Koordinatenebene sich projiziert und deren Gleichung lautet

$$\frac{\xi^2}{r^2} + \frac{\eta^2}{r^2 \cos^2\theta} = 1;$$

die Wahrscheinlichkeit dieses einfachen Ereignisses, dessen Eintreffen an die Bedingung

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 \cos^2\theta} < 1$$

oder

$$-\arccos\sqrt{\frac{y^2}{r^2 - x^2}} < \theta < \arccos\sqrt{\frac{y^2}{r^2 - x^2}}$$

geknüpft ist, beträgt $\frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{y^2}{r^2 - x^2}}$.

Daraus ergiebt sich die vollständige zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit des oben beschriebenen Ereignisses:

$$p = \frac{2}{\pi^6 r^2}\int\int\int_0^{\pi} \arccos\sqrt{\frac{y^2}{r^2 - x^2}}\,dx\,dy\,d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi^2 r^2}\int\int \arccos\sqrt{\frac{y^2}{r^2 - x^2}}\,dx\,dy,$$

die Integration über die ganze Kreisfläche ausgedehnt. Zunächst hat man

$$\int \arccos\sqrt{\frac{y^2}{r^2 - x^2}}\,dy = y\arccos\frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \sqrt{r^2 - x^2 - y^2},$$

daraus

$$\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \arccos \sqrt{\frac{y^2}{r^2-x^2}}\, dy = \sqrt{r^2-x^2};$$

daher ist schliesslich

$$p = \frac{4}{\pi^2 r^2} \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx = \frac{4}{\pi^2 r^2} \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \frac{2}{\pi}.$$

Bezeichnet ω die Wahrscheinlichkeit, dass der Schütze die ruhende Scheibe trifft, gleichgiltig in welchem Punkte, so ist $\frac{2}{\pi}\omega$ die Wahrscheinlichkeit, dass er die rotierende Scheibe treffen wird, letztere also etwa $\frac{2}{3}$ der ersteren.

139. **Problem II.** *Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass eine gegebene Kreiskegelfläche durch eine willkürlich gelegte Ebene nach einer Ellipse, beziehungsweise nach einer Hyperbel geschnitten wird.*

Lösung. Den Winkel, welchen die Erzeugenden der Kegelfläche mit deren Axe einschliessen, bezeichnen wir mit α. Denkt man sich durch den Scheitel zu der schneidenden eine parallele Ebene gelegt, so wird der Schnitt eine Ellipse sein, wenn letztere Ebene mit der Kegelfläche nur den Scheitel gemeinsam hat, oder wenn das im Scheitel zu ihr errichtete Perpendikel mit der Kegelaxe einen Winkel bildet, der kleiner ist als $\frac{\pi}{2} - \alpha$; die Wahrscheinlichkeit hierfür ist aber nach Gleichung 1), Nr. 130:

$$q = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right);$$

die Wahrscheinlichkeit eines hyperbolischen Schnittes ist daher

$$p = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

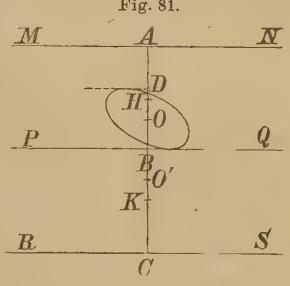
Für $\alpha = \frac{\pi}{6}$ wird $p = q = \frac{1}{2}$.

140. **Problem III.** *Eine Münze wird gegen ein unbegrenztes horizontales, aus parallelen äquidistanten Drähten*

bestehendes Gitter fallen gelassen; die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die Münze im Falle einen der Drähte des Gitters trifft.

Lösung. Es genügt, drei aufeinander folgende Drähte MN, PQ, RS (Fig. 81) in Betracht zu ziehen; von ihrer sowie von der Dicke der Münze wird abgesehen, ebenso wird die Umdrehungsgeschwindigkeit der letzteren der Fallgeschwindigkeit gegenüber vernachlässigt. ABC ist eine gemeinschaftliche rechtwinklige Transversale, H, K sind die Mittelpunkte von $AB = BC = a$.

Fig. 81.



Offenbar reicht es hin, jene Fälle zu betrachten, in welchen der Mittelpunkt der Münze im freien Fall einen Punkt von HK passiert.

Die in Fig. 81 gezeichnete Ellipse stelle die Projektion des Münzrandes auf der Ebene des Gitters in dem Augenblicke vor, wo die Münze das Gitter erreicht und den Draht PQ eben berührt. Ist O ihr Mittelpunkt und macht man $BO' = BO$, so wird der Draht PQ getroffen werden, wenn bei derselben Breite BD der Projektion des Münzrandes der Mittelpunkt der Münze durch einen Punkt von OO' geht.

Bezeichnet p die Wahrscheinlichkeit, dass die Projektion des Münzrandes die Breite $BD = OO' = h$ hat, und q die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelpunkt der Münze durch einen Punkt von OO' sich bewegen wird, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider Ereignisse

$$\omega = pq.$$

Erster Fall. Der Durchmesser c der Münze ist kleiner als die Maschenweite a des Gitters. Die Breite h bleibt solange unverändert, als die Normale zur Ebene der Münze mit der Transversale ABC denselben Winkel α bildet, welcher aus der Beziehung $h = c \sin \alpha$ sich ergiebt; die bezügliche Wahrscheinlichkeit ist Nr. 132 zufolge

$$p = \sin \alpha \, d\alpha;$$

ferner ist, da h für alle Werte von α kleiner bleibt als a:

$$q = \frac{h}{a} = \frac{c}{a} \sin \alpha,$$

daher

$$\omega = \frac{c}{a} \sin^2 \alpha \, d\alpha,$$

und die vollständige Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses:

$$1) \qquad P = \frac{c}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \, d\alpha = \frac{c}{a} \frac{\pi}{4}.$$

Zweiter Fall. Der Durchmesser c der Münze ist grösser als die Maschenweite a des Gitters. Setzt man $c \sin \alpha_0 = a$, so wird, solange $\alpha < \alpha_0$, auch $h = c \sin \alpha < a$; p und q haben also dieselben Werte wie im ersten Falle. Wird aber $\alpha > \alpha_0$, so wird auch $h > a$, die Münze muss dann notwendig den Draht treffen; p behält seinen früheren Wert, dagegen ist für q die Einheit zu setzen. Man hat also

$$2) \begin{cases} P = \frac{c}{a} \int_0^{\alpha_0} \sin^2 \alpha \, d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{c}{2a} \left(\alpha_0 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_0 \right) + \cos \alpha_0 \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_0}{\sin \alpha_0} + \cos \alpha_0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{a} \arcsin \frac{a}{c} + \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - a^2} \right). \end{cases}$$

So ist beispielsweise für $a = \pi c$ (erster Fall) $P = \frac{1}{4}$; für $a = c$ (Grenze zwischen dem ersten und zweiten Fall) liefern beide Formeln $P = \frac{\pi}{4}$; für $a = \frac{c}{2}$ (zweiter Fall) wird $P = \frac{1}{6} \pi + \frac{1}{4} \sqrt{3}$.

141. **Problem IV.** *Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass eine willkürlich gelegte Ebene, die ein Rotationsellipsoid schneidet, den Äquator desselben trifft.*

Lösung. Bezeichnet n die Anzahl beliebig gelegter Ebenen, welche den Äquator schneiden, N die analoge auf das Ellipsoid bezügliche Anzahl, so ist

$$p = \frac{n}{N}.$$

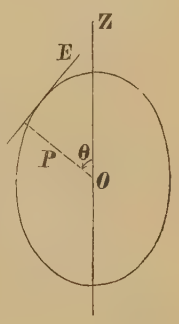
1. Berechnung von N. Nach dem Satze Nr. 134 ist

$$N = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Wählt man die Rotationsaxe als Z-Axe (Fig. 82), so kann mit Rücksicht auf den besonderen Charakter der Fläche auch geschrieben werden:

$$N = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} p \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \sin\theta \, d\theta.$$

Fig. 82.



Das Perpendikel p zur Tangentialebene E erscheint als Radiusvektor der auf den Mittelpunkt O bezogenen Fusspunktkurve der Meridianellipse, deren Gleichung, wenn a, b die Halbaxen ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$ die lineare Exentrizität) sind, lautet:

$$p^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta.$$

Nach dieser Bemerkung ist

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} N &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta} \sin\theta \, d\theta = 4\pi \int_0^1 \sqrt{b^2 + c^2 x^2} \, dx \\ &= 2\pi \left(a + \frac{b^2}{c} l \cdot \frac{a+c}{b} \right). \end{aligned} \right.$$

Für ein abgeplattetes Ellipsoid findet man auf ähnlichem Wege

$$2) \qquad N = 2\pi \left(b + \frac{a^2}{c} \arcsin \frac{c}{a} \right).$$

2. Berechnung von n. Eine Kreisfläche vom Halbmesser r kann als Grenze eines abgeplatteten Ellipsoids angesehen werden, für welches $a = c = r$ und $b = 0$ ist; mit diesen Werten liefert Gleichung 2)

$$n = \pi^2 r,$$

so dass bei dem oblongen Ellipsoid

$$3) \qquad n = \pi^2 b,$$

bei dem abgeplatteten

$$4) \qquad n = \pi^2 a.$$

Mit den Ausdrücken 1) bis 4) ergiebt sich die verlangte Wahrscheinlichkeit für ein oblonges Ellipsoid

5) $$p = \frac{\pi}{2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c}\, l \cdot \frac{a+c}{b}\right)},$$

für ein abgeplattetes Ellipsoid

6) $$p = \frac{\pi}{2\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{c}\, arc\sin \frac{c}{a}\right)}.$$

Mit $a = b$, $c = 0$, d. i. für die Kugel, liefern beide Formeln $p = \frac{\pi}{4}$.

142. **Problem V.** *Ein Rotationsellipsoid wird durch eine beliebige Ebene geschnitten; es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass die Pole (Kreispunkte) des Ellipsoids durch die Ebene getrennt werden.*

Lösung. Bezeichnet n die Anzahl der Ebenen, welche die Axe des Ellipsoids schneiden, N die Anzahl der Ebenen, welche das Ellipsoid selbst schneiden, so ist

$$p = \frac{n}{N}.$$

1. Für N gelten die Werte in 1) und 2), Nr. 141.

2. Berechnung von n. Eine Gerade von der Länge $2r$ kann als Grenze eines oblongen Ellipsoids angesehen werden, für welches $a = c = r$ und $b = 0$ ist; mit diesen Werten liefert aber Gleichung 1), Nr. 141:

$$n = 2\pi r,$$

so dass bei dem oblongen Ellipsoid

1) $$\begin{cases} n = 2\pi a, \\ p = \dfrac{a}{a + \frac{b^2}{c}\, l \cdot \frac{a+c}{b}}, \end{cases}$$

bei dem abgeplatteten Ellipsoid

2)
$$\begin{cases} n = 2\pi b, \\ p = \dfrac{b}{b + \dfrac{a^2}{c}\, arc\, sin\, \dfrac{c}{a}}. \end{cases}$$

Mit $a = b$, $c = 0$, d. i. für die Kugel, liefern beide Gleichungen übereinstimmend $p = \frac{1}{2}$.

Zweiter Teil.

Geometrische Mittelwerte.

Einleitung.

143. Der Mittelwert einer stetigen Gesamtheit geometrischer Grössen steht zu dem Mittelwerte einer diskreten Grössenreihe in derselben Beziehung wie die Wahrscheinlichkeit, die auf eine stetige Gesamtheit möglicher Fälle sich bezieht zu einer solchen, der eine diskrete Reihe möglicher Fälle zu Grunde liegt. Der Vorgang bei der Bestimmung eines solchen Mittelwertes wird sich daher auf ähnliche Betrachtungen stützen, wie sie bei Ermittelung geometrischer Wahrscheinlichkeiten angestellt worden sind.

Dieser Vorgang beruht darin, dass man die stetige Gesamtheit durch eine unstetige von derselben wesentlichen Beschaffenheit sich ersetzt denkt, die Summe der diskreten Reihe geometrischer Grössen bildet und durch die Anzahl der letzteren dividiert; der Quotient nähert sich mit wachsender Anzahl der herausgegriffenen Einzelwerte einer Grenze, welche den Mittelwert der stetigen Gesamtheit vorstellt.

Es ist notwendige Bedingung, dass die diskrete Reihe, welche man an Stelle der stetigen Gesamtheit gesetzt denkt, mit dieser von gleicher wesentlicher Beschaffenheit sei. Ist letztere dem Wortlaute des Problems nicht zu entnehmen, so bleibt eine Unbestimmtheit, welche wie bei geometrischen Wahrscheinlichkeiten zu widersprechenden Lösungen desselben Problems führen kann. So lässt die Frage nach dem Mittelwert der Ordinaten einer Kurve eine zweifache Auffassung zu: entweder gehören die Ordinaten zu willkürlich angenommenen Punkten der Kurve, oder sie sind aus beliebig angenommenen Punkten der Abscissenaxe geführt; im ersten

Falle haben die Kurvenpunkte, aus welchen die Ordinaten gezogen werden, eine gleichförmige Punktreihe auf der Kurve, im letzteren Falle die Fusspunkte der Ordinaten eine gleichförmige Punktreihe auf der Abscissenlinie zu bilden. Analytisch entspricht der Unterschied jenem zwischen der Darstellung der Ordinate als Funktion des Bogens und als Funktion der Abscisse.

Um die Bestimmung eines geometrischen Mittelwerts auf das Gebiet der Analysis zu übertragen, stellt man die geometrische Grösse, um die es sich handelt, als Funktion einer oder mehrerer unabhängiger Variablen dar und hat dann die Aufgabe, den Mittelwert einer Funktion zu bestimmen für alle Werte oder Wertverbindungen der unabhängigen Variabeln, welche eine gegebene stetige Mannigfaltigkeit ein- oder mehrfacher Ausdehnung ausmachen.

144. 1) Die geometrische Grösse y ist Funktion einer unabhängigen Variabeln x, d. i. $y = \mathfrak{F}(x)$. Das Wertgebiet von x sei begrenzt durch die Beziehungen

$$a \leqq x \leqq b;$$

dann ist der auf dieses Wertgebiet bezügliche Mittelwert M von y definiert durch die Gleichung

$$M = lim \frac{\mathfrak{F}(a)+\mathfrak{F}(a+\Delta x)+\mathfrak{F}(a+2\Delta x)+\ldots+\mathfrak{F}(b-\Delta x)}{\frac{b-a}{\Delta x}} = \frac{lim \sum_a^b \mathfrak{F}(x)\Delta x}{b-a}.$$

d. h. es ist

$$2) \qquad M = \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathfrak{F}(x)\,dx.$$

Der Ausdruck für den Mittelwert gestattet noch zwei andere Deutungen, welche hier bei dem einfachsten Falle angeschlossen werden mögen.

Sieht man die Werte der geometrischen Grösse y, welche den Werten der Variablen zwischen x und $x + \Delta x$ entsprechen, als gleich an und übereinstimmend mit dem Anfangswerte $\mathfrak{F}(x)$, so ist, da Δx ein Mass für die Anzahl dieser Werte, $\mathfrak{F}(x)\Delta x$ ein Mass für ihre Summe und

$$lim \sum_{a}^{b} \mathfrak{F}(x) \Delta x = \int_{a}^{b} \mathfrak{F}(x)\, dx$$

ein Mass für die Summe aller Werte von y auf dem ganzen Wertgebiet von x, und da $b - a$ das gleichartige Mass für die Anzahl der Werte von x ist, so kann der Mittelwert gedeutet werden als *Quotient aus dem Masse der Summe der geometrischen Grössen durch das Mass ihrer Anzahl.*

Der Bruch $\frac{\Delta x}{b - a}$ drückt die Wahrscheinlichkeit dafür aus, dass ein beliebig herausgegriffener Wert y der geometrischen Grösse einem Werte der Variabeln aus dem Intervall $x \ldots x + \Delta x$ angehöre; hiernach kann der Mittelwert

$$M = lim \sum_{a}^{b} \mathfrak{F}(x) \frac{\Delta x}{b - a}$$

gedeutet werden als *mutmasslicher Wert der geometrischen Grösse, wenn sie aus der Gesamtheit willkürlich herausgegriffen wird.*

Diese letzte Auffassung des Mittelwertes hat den Vorteil, dass sie sich unmittelbar auf den Fall übertragen lässt, wo das Gebiet der Werte der unabhängigen Variabeln nicht gleichförmig ist, d. h. wo die Menge der Werte dieser Variabeln in einem Intervall nicht von der Grösse desselben allein, sondern auch von seiner Lage im Wertgebiet abhängt; dann erscheint die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebig herausgegriffener Wert von y einem Werte von x zwischen den Grenzen x und $x + \Delta x$ angehört, in der Form

$$\frac{\varphi(x)\, \Delta x}{\sum_{a}^{b} \varphi(x)\, \Delta x}$$

und für den Mittelwert von y ergiebt sich der Ausdruck

$$3) \quad M = lim \sum_{a}^{b} \mathfrak{F}(x) \cdot \frac{\varphi(x)\, \Delta x}{\sum_{a}^{b} \varphi(x)\, \Delta x} = \frac{\int_{a}^{b} \mathfrak{F}(x)\, \varphi(x)\, dx}{\int_{a}^{b} \varphi(x)\, dx}.$$

145. 2) Die geometrische Grösse z ist eine Funktion zweier unabhängiger Variabeln x, y. In diesem Falle ist der Mittelwert einer Funktion $z = \mathfrak{F}(x, y)$ für alle Wertverbindungen eines gegebenen Gebietes K der Veränderlichen x, y zu bestimmen. Fasst man diese als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes einer Ebene auf, so entspricht K ein Teil dieser Ebene; diesen irgendwie begrenzten Teil zerlege man durch zwei Systeme von Geraden, welche der X-, beziehungsweise der Y-Axe parallel sind und den gegenseitigen Abstand Δy, resp. Δx haben, in Rechtecke, deren Eckpunkte nun ein System von Wertverbindungen x, y repräsentieren, denen wiederum ein System von Werten von $z = \mathfrak{F}(x, y)$ entspricht. Der Grenzwert aus der Summe der letztgenannten Werte, geteilt durch ihre Anzahl, welche der Anzahl $\frac{K}{\Delta x \Delta y}$ der Rechtecke gleichkommt, giebt den verlangten Mittelwert, d. h. es ist

$$M = lim \frac{\Sigma\Sigma \mathfrak{F}(x, y)}{\frac{K}{\Delta x \Delta y}} = \frac{\int\int \mathfrak{F}(x, y)\, dx\, dy}{K},$$

und da $K = \int\int dx\, dy$, so hat man schliesslich

$$M = \frac{\int\int \mathfrak{F}(x, y)\, dx\, dy}{\int\int dx\, dy},$$

beide Integrationen über die Mannigfaltigkeit K ausgedehnt.

146. 3) Die geometrische Grösse u ist eine Funktion von drei unabhängigen Variabeln x, y, z. Hier ist der Mittelwert einer Funktion $u = \mathfrak{F}(x, y, z)$ für alle Wertverbindungen einer gegebenen stetigen Mannigfaltigkeit K der Variabeln x, y, z zu berechnen. Fasst man wieder x, y, z als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes im Raume auf, so entspricht K ein Teil des Raumes; diesen zerlege man durch drei Systeme von Ebenen, welche den Ebenen YZ, ZX, XY beziehungsweise parallel sind und den gegenseitigen Abstand Δx, resp. Δy, Δz haben, in Parallelepipeda, deren Eckpunkte nun ein System von Wertverbindungen x, y, z repräsentieren, welchen wieder ein System von Werten von $u = \mathfrak{F}(x, y, z)$

entspricht. Die Summe der letzteren Werte, geteilt durch ihre Anzahl $\frac{K}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}$, nähert sich bei unendlich abnehmenden Δx, Δy, Δz einer Grenze, welche dem verlangten Mittelwerte gleichkommt. Es ist demnach

$$M = lim\ \frac{\Sigma\Sigma\Sigma\,\mathfrak{F}(x, y, z)}{\frac{K}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}} = \frac{\iiint \mathfrak{F}(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz},$$

beide Integrationen über das Wertgebiet K ausgedehnt.

147. 4) Die geometrische Grösse u ist eine Funktion von beliebig vielen unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Um den Mittelwert einer Funktion $u = \mathfrak{F}(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ von beliebig vielen Variabeln für alle Wertverbindungen derselben, welche eine gegebene stetige Mannigfaltigkeit K ausmachen, zu bestimmen, denke man die stetige Mannigfaltigkeit durch eine diskrete ersetzt, in welcher die aufeinander folgenden Werte der Variabeln sich beziehungsweise um $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots$ numerisch unterscheiden. Jeder Wertverbindung $x_1, x_2, x_3, \ldots$ aus dieser unstetigen Mannigfaltigkeit entspricht ein Wert von u; die Anzahl der Wertverbindungen kommt dem Quotienten aus dem Inhalte K der Mannigfaltigkeit durch das Element derselben $\Delta x_1\,\Delta x_2\,\Delta x_3 \ldots$ gleich. Der Mittelwert der Funktion ist demnach

$$M = lim\ \frac{\Sigma\Sigma\Sigma\ldots\,\mathfrak{F}(x_1, x_2, x_3, \ldots)}{\frac{K}{\Delta x_1\,\Delta x_2\,\Delta x_3 \ldots}} = \frac{\iiint\ldots\,\mathfrak{F}(x_1, x_2, x_3, \ldots)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \ldots}{\iiint\ldots\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \ldots},$$

die beiden Integrationen über das Wertgebiet K ausgedehnt.

148. Ausser diesem allgemeinen Verfahren giebt es noch besondere Methoden zur Bestimmung von Mittelwerten, durch deren Anwendung häufig schwierige und umständliche Integrationen umgangen werden können. Diese Methoden stützen sich auf geometrische Betrachtungen, auf allgemeine Sätze über Mittelwerte, auf den Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welcher mitunter die Zurückführung von Aufgaben über Mittelwerte auf viel einfachere über Wahrscheinlichkeiten gestattet, u. dgl.

Sätze und Aufgaben.

149. **Problem I.** *Den Mittelwert der Ordinaten einer Kurve zu finden, wenn dieselben a) aus beliebigen Punkten der Kurve, b) durch beliebige Punkte der Abscissenaxe gezogen werden. Die Kurve befindet sich nur zu einer Seite der Abscissenaxe.*

Lösung. a) Bezeichnet y die dem Bogen s der Kurve entsprechende Ordinate, ds das anstossende Kurvenelement, S die Länge der ganzen Kurve, so ist

$$1) \qquad M_1 = \frac{\int_0^S y\, ds}{S} = Y_1;$$

dabei bedeutet Y_1 die Ordinate des Schwerpunktes der Kurve. Dies führt zu dem Satze:

Theorem I. *Der Mittelwert der aus einem beliebigen Punkte einer Kurve gezogenen Ordinate kommt gleich der Ordinate des Schwerpunktes der Kurve, vorausgesetzt, dass diese ganz zu einer Seite der Abscissenaxe angeordnet ist.*

So ergiebt sich beispielsweise für den Mittelwert der Ordinaten aller Punkte eines Halbkreises der Ausdruck

$$M = \frac{\int_0^\pi r \sin\theta\, r\, d\theta}{\pi r} = \frac{2}{\pi} r.$$

b) Bezeichnet y die der Abscisse x entsprechende Ordinate, sind x_0, X_0 die Abscissen der Kurvenendpunkte, so hat man

$$M_2 = \frac{\int_{x_0}^{X_0} y\, dx}{X_0 - x_0} = Y_2,$$

wobei Y_2 die Höhe eines Rechtecks bedeutet, welches über der Grundlinie $X_0 - x_0$ stehend dieselbe Fläche besitzt, wie die Kurve. Daraus ergiebt sich

Theorem II. *Der Mittelwert der einer beliebigen Abscisse zugehörigen Ordinate einer Kurve ist gleich der Höhe eines Rechtecks, welches über demselben Abschnitt der Abscissenaxe ruhend mit der Kurve gleiche Fläche hat.*

Diesem Satze zufolge ist der Mittelwert aller zu dem Durchmesser gezogenen Ordinaten eines Halbkreises vom Radius r gleich

$$M = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{2r} = \frac{\pi}{4} r.$$

150. **Problem II.** *Den mittleren Radiusvektor einer Kurve zu berechnen, wenn derselbe a) zu einem beliebigen Punkte der Kurve, b) unter einem beliebigen Winkel gegen die Polaraxe geführt wird.*

Lösung. a) Bezeichnet ϱ den Leitstrahl, welcher den Bogen s von der Kurve abschneidet, ds das angrenzende Element der Kurve, S ihre Länge, so hat man

$$1) \qquad M_1 = \frac{\int_0^S \varrho \, ds}{S}.$$

Als Beispiel diene die Berechnung des mittleren Leitstrahles einer Ellipse aus einem ihrer Brennpunkte. Sind x, y die Mittelpunktskoordinaten eines Punktes der Ellipse und setzt man $x = a \cos\varphi$, $y = b \sin\varphi$, so ist

$$\varrho = a - \frac{c}{a} x = a - c\cos\varphi, \quad ds = \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}\, d\varphi,$$

folglich

$$M = \frac{\int_0^{2\pi} (a - c\cos\varphi)\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}\, d\varphi}{S} = \frac{aS}{S} = a,$$

weil

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}\, d\varphi = S$$

und

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}\, d\varphi = 0$$

ist.

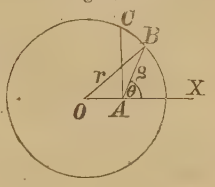
b) Bezeichnet ϱ den Radiusvektor, welcher der Amplitude θ entspricht, sind θ_1, θ_2 die Amplituden der Kurvenendpunkte, so ist

$$2) \qquad M_2 = \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho \, d\theta}{\theta_2 - \theta_1}.$$

Als Beispiel möge die mittlere, in beliebiger Richtung gemessene Entfernung eines gegebenen Punktes innerhalb des Kreises vom Umfange gerechnet werden.

O (Fig. 83) sei der Mittelpunkt des Kreises, A der gegebene Punkt, $OA = c$, r der Halbmesser des Kreises, $AB = \varrho$ die Länge des unter dem Winkel $XAB = \theta$ geführten Leitstrahls, so ist

Fig. 83.



$$\varrho = r\sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}\sin^2\theta} - c\cos\theta,$$

daher

$$M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{r\sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}\sin^2\theta} - c\cos\theta\right\}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}\sin^2\theta}\,d\theta,$$

d. h. die verlangte mittlere Entfernung ist der Halbmesser eines Kreises, welcher mit einer Ellipse von den Halbaxen r und $\sqrt{r^2 - c^2} = AC$ gleiche Länge hat.

151. **Problem III.** *Ein materieller Punkt beschreibt unter dem Einflusse einer Centralkraft eine elliptische Bahn; es ist der Mittelwert seiner in beliebigen Zeitpunkten gemessenen Entfernungen vom Kraftcentrum (das mit einem Brennpunkte der Ellipse zusammenfällt) zu bestimmen.*

Lösung. Bezeichnet ϱ den Leitstrahl des beweglichen Punktes im Zeitpunkte t (vom Perihel an gerechnet), so ist

$$M = \frac{\int \varrho\, dt}{\int dt},$$

beide Integrationen auf einen vollen oder halben Umlauf ausgedehnt. Ist nun $d\theta$ der Winkel, welchen der Leitstrahl im nächsten Zeitelement dt durchläuft, so ist dem zweiten Keplerschen Gesetze zufolge

$$\frac{1}{2}\varrho^2\, d\theta = \varkappa\, dt,$$

wobei $\varkappa$ eine Konstante bedeutet. Mit Rücksicht auf diese Beziehung ist

1)
$$= \frac{\int_0^{\pi}\varrho^3\, d\theta}{\int_0^{\pi}\varrho^2\, d\theta}.$$

Wenn nun a die grosse Halbaxe, ε die relative Excentrizität, $p = a(1-\varepsilon^2)$ der Parameter der elliptischen Bahn ist, so ist mit Beibehaltung der früheren Zählungsweise

$$\varrho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\theta}$$

und

$$\int_0^\pi \varrho^3 d\theta = p^3 \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1-\varepsilon\cos\theta)^3} = p^3 \int_0^\pi \frac{\sec^4\frac{1}{2}\theta\, d(2\,tang\,\frac{1}{2}\theta)}{\{1-\varepsilon+(1+\varepsilon)\,tang^2\frac{1}{2}\theta\}^3};$$

setzt man hierin $tang\,\frac{1}{2}\theta = x$, hierauf $(1+\varepsilon)x^2 = (1-\varepsilon)y^2$, so werden 0 und ∞ die neuen Grenzen und

$$\int_0^\pi \varrho^3 d\theta = \frac{2p^3}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \int_0^\infty \frac{\{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)y^2\}^2}{(1+y^2)^3} dy;$$

mit der Substitution $y = tang\,\omega$ giebt dies endlich

2)
$$\begin{cases} \int_0^\pi \varrho^3 d\theta = \frac{2p^3}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(1+\varepsilon)\cos^2\omega + (1-\varepsilon)\sin^2\omega\}^2 d\omega \\ = \frac{2p^3}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\varepsilon\cos 2\omega)^2 d\omega \\ = \frac{\pi p^3}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right). \end{cases}$$

Das Integral im Nenner des Ausdruckes für M, d. i. $\int_0^\pi \varrho^2 d\theta$, respräsentiert den Flächeninhalt der Ellipse; mithin ist

3)
$$\int_0^\pi \varrho^2 d\theta = \pi a^2 (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Werte 2) und 3) in 1) eingesetzt geben

4)
$$M = \frac{p^3}{a^2(1-\varepsilon^2)^3}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right) = a\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right).$$

152. **Problem IV.** *Die mittlere Entfernung zweier Punkte zu ermitteln, welche auf dem Umfange eines gegebenen Kreises willkürlich angenommen werden.*

Lösung. Augenscheinlich geht es an, den einen der beiden Punkte (A) festzuhalten und den andern (B) auf einen Halbkreis zu beschränken. Wird nun der Winkel, welchen die Sehne AB mit dem aus A gezogenen Durchmesser einschliesst, mit θ, der Halbmesser des Kreises mit r bezeichnet, so ist

$$AB = 2r\cos\theta, \quad ds = 2r\,d\theta,$$

daher

$$M = \frac{4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta}{\pi r} = \frac{4}{\pi}r.$$

153. **Problem V.** *Die mittlere Entfernung eines in einer begrenzten Geraden willkürlich angenommenen Punktes von einem Endpunkte zu finden.*

Lösung. Hier lehrt die blosse Überlegung, dass die verlangte mittlere Entfernung der Hälfte der gegebenen Geraden gleichkommt.

154. **Problem VI.** *Die mittlere Entfernung zweier in einer begrenzten Geraden* AB = a *beliebig angenommener Punkte zu berechnen.*

Lösung. Sind P, Q die beiden Punkte, $AP = x$, $AQ = y$, so ist

$$M = \frac{\int_0^a\int_x^a (y-x)\,dx\,dy}{\int_0^a\int_x^a dx\,dy} = \frac{a}{3}.$$

155. **Theorem III.** *In jedem von zwei sich ausschliessenden Gebieten* A, B *(Linien, Flächen, Räumen) wird ein Punkt willkürlich angenommen. Bezeichnet* M *einen auf die gegenseitige Lage dieser Punkte bezüglichen Mittelwert und sind* M', M_A, M_B *gleichartige, jedoch auf zwei in dem ganzen Gebiete* A + B, *beziehungsweise in* A, *in* B *beliebig angenommene Punkte bezügliche Mittelwerte, so besteht die Relation*

$$(A + B)^2 M' = 2AB\,M + A^2 M_A + B^2 M_B.$$

Beweis. Wir denken uns die Summe der betreffenden geometrischen Grössen, welche aus der willkürlichen Annahme beider Punkte in dem ganzen Gebiete $A+B$ entspringen können, in ihre Bestandteile zerlegt. Diese Bestandteile entsprechen der Reihe nach den Fällen, wo der erste Punkt in A, der zweite in B, dann umgekehrt, ferner wo beide Punkte in A, beide in B liegen; mithin ist, wenn wir die betreffenden Summen mit S_{A+B}, S_A u. s. w. bezeichnen:

$$S_{A+B} = S_{A,B} + S_{B,A} + S_A + S_B,$$

oder wegen $S_{A,B} = S_{B,A}$:

$$S_{A+B} = 2S_{A,B} + S_A + S_B.$$

Da nun $S_A = A^2 M_A$, $S_{A,B} = ABM$ u. s. w., so folgt die oben behauptete Beziehung

1) $$(A+B)^2 M' = 2ABM + A^2 M_A + B^2 M_B.$$

Für den Fall $A = B$ vereinfacht sich dieselbe zu

2) $$2M' = M + M_A.$$

156. **Problem VII.** *Eine begrenzte Gerade* $AB = a$ *wird durch einen beliebig angenommenen Punkt in zwei Teile geteilt und in jedem dieser Teile wird ein weiterer Punkt willkürlich bezeichnet. Die mittlere Entfernung der letzteren zwei Punkte zu finden.*

Lösung. Sind x und $a - x$ die beiden durch den ersten Punkt gebildeten Teile von AB, M_x der dieser Teilung entsprechende Mittelwert, so ist nach Theorem Nr. 155 und mit Beachtung von Nr. 154:

$$a^2 \frac{a}{3} = 2x(a-x) M_x + x^2 \frac{x}{3} + (a-x)^2 \frac{(a-x)}{3},$$

woraus nach einfacher Reduktion

$$M_x = \frac{a}{2}$$

folgt; der Mittelwert ist also von dem Teilungsverhältnis unabhängig.

157. **Theorem IV.** *In jedem von zwei teilweise sich deckenden Gebieten* $A+C$, $C+B$ *(Linien, Flächen, Räumen) wird ein Punkt willkürlich angenommen. Bezeichnet* M *einen*

auf die gegenseitige Lage dieser Punkte bezüglichen Mittelwert, und sind M', M_A, M_B, M_C *gleichgeartete, jedoch auf zwei in dem ganzen Gebiete* $A + C + B = G$, *beziehungsweise in* A, *in* B, *in* C *beliebig angenommene Punkte bezügliche Mittelwerte, so gilt die Beziehung*

$$2(A + C)(C + B)M = G^2 M' + C^2 M_C - A^2 M_A - B^2 M_B.$$

Beweis. Die Summe der geometrischen Grössen, welche bei Annahme der beiden Punkte in dem ganzen Gebiete $A + C + B$ entstehen können, zerfällt in mehrere Bestandteile, welche folgenden Fällen entsprechen: der erste Punkt liegt in $A + C$, der zweite in $C + B$; dann umgekehrt; beide Punkte befinden sich in A, beide in B; dabei aber wurden die Fälle, wo beide Punkte in C liegen, doppelt gezählt, müssen daher einmal in Abzug gebracht werden. Mit den in Nr. 155 gebrauchten Bezeichnungen ist also

$$S_G = S_{A+C,\,C+B} + S_{C+B,\,A+C} - S_C + S_A + S_B,$$

und dies giebt wegen $S_{A+C,\,C+B} = S_{C+B,\,A+C}$ den obigen Satz:

$$2(A + C)(C + B)M = G^2 M' + C^2 M_C - A^2 M_A - B^2 M_B.$$

Mit $C = 0$ wird man wieder auf den Satz Nr. 155 geführt.

158. **Problem VIII.** *In jeder der beiden begrenzten Geraden* AB, CD, *welche den Teil* CB *gemeinschaftlich haben, wird ein Punkt beliebig angenommen; die mittlere Entfernung dieser Punkte zu finden.*

Lösung. Mit Benutzung des Satzes Nr. 157 und von Nr. 154 ergiebt sich die Gleichung

$$2\,AB \cdot CD \cdot M = \overline{AD}^2 \cdot \frac{AD}{3} + \overline{CB}^2 \cdot \frac{CB}{3} - \overline{AC}^2 \cdot \frac{AC}{3} - \overline{BD}^2 \cdot \frac{BD}{3},$$

aus welcher folgt:

$$M = \frac{\overline{AD}^3 + \overline{CB}^3 - \overline{AC}^3 - \overline{BD}^3}{6\,AB \cdot CD}.$$

159. **Problem IX.** *In der Fläche eines gegebenen Kreises wird ein Punkt beliebig angenommen und durch denselben eine Sehne von beliebiger Richtung geführt; die mittlere Länge derselben zu finden.*

Lösung. Wenn O der Mittelpunkt, r der Halbmesser des gegebenen Kreises, P der beliebig angenommene Punkt, $OP = x$ und θ der Winkel ist, unter welchem die durch P gezogene Sehne AB gegen den durch P geführten Durchmesser geneigt ist, so hat man

$$AB = 2(r^2 - x^2 \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}},$$

und die Summe aller Sehnen ist ausgedrückt durch

$$\int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(r^2 - x^2 \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} 2\pi x\, dx\, d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^2\theta} d\theta = \frac{4}{3}\pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^3\theta}{1-\cos^2\theta} d\theta = \frac{4}{3}\pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos\theta+\cos^2\theta}{1+\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{d\,\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} + \cos\theta\, d\theta \right\} = \frac{8}{3}\pi r^3,$$

ihre Anzahl durch $\frac{\pi}{2} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi^2}{2} r^2$; folglich ist

$$M = \frac{16}{3\pi} r$$

der verlangte Mittelwert.

160. **Problem X.** *Die mittlere Entfernung eines Punktes im Kreisumfange von allen Punkten der Kreisfläche zu finden.*

Lösung. Wählt man den Punkt im Umfange als Pol, den durch ihn gehenden Durchmesser als Polaraxe, so ist

$$M = \frac{\int\int \varrho\, dJ}{\int\int dJ} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2r\cos\theta} \varrho^2\, d\theta\, d\varrho}{\pi r^2} = \frac{32}{9\pi} r.$$

161. **Problem XI.** *Die mittlere Entfernung zweier in der Fläche eines gegebenen Kreises willkürlich angenommener Punkte zu finden.*

Lösung. Bezeichnet r den Halbmesser des Kreises und M den verlangten Mittelwert, so ist die Summe der Entfernungen aller Punktepaare ausgedrückt durch

$$(\pi r^2)^2 M.$$

Sie ändert sich, wenn r um dr vergrössert wird, um

$$d\{(\pi r^2)^2 M\}.$$

Diese Änderung kann aber auch auf anderem Wege ermittelt werden, da sie von jenen Punktepaaren herrührt, bei welchen der eine oder der andere Punkt in den zugewachsenen Kreisring fällt; sie beträgt also

$$2 \,.\, 2\pi r\, dr \,.\, \Sigma,$$

wenn Σ die Summe der Entfernungen eines Punktes im Umfange des gegebenen Kreises von allen Punkten seiner Fläche bezeichnet. Mit Benutzung des im vorigen Problem für diese Entfernungen gefundenen Mittelwertes ist

$$\Sigma = \pi r^2 \cdot \frac{32}{9\pi} r = \frac{32}{9} r^3.$$

Zur Bestimmung von M ergiebt sich also die Gleichung

$$d\{(\pi r^2)^2 M\} = \frac{128}{9} \pi r^4\, dr,$$

aus welcher durch Integration

$$\pi^2 r^4 M = \frac{128}{9} \pi \int_0^r r^4\, dr = \frac{128}{45} \pi r^5$$

und weiter

$$M = \frac{128}{45\pi} r$$

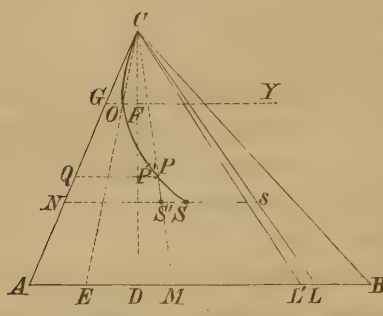
folgt.

162. **Theorem V.** *Die mittlere Entfernung des Scheitels eines Dreieckes von allen Punkten der Dreiecksfläche kommt gleich der Entfernung des Scheitels vom Schwerpunkte des Dreiecks gemessen längs einer Parabel, welche den betreffenden Scheitel in Richtung der einen der von ihm ausgehenden Seiten verlässt und den Schwerpunkt in Richtung der anderen Seite erreicht.*

Lösung. Sei ABC (Fig. 84, S. 198) das gegebene Dreieck mit den Seiten a, b, c, S sein Schwerpunkt, und es

handle sich um die mittlere Entfernung des Scheitels C von den Punkten der Dreiecksfläche. Man führe durch C einen Strahl CL, drehe denselben aus der Lage CB in die Lage CA und transponiere die rechts durch diesen Strahl abgeschnittene Fläche kontinuierlich nach dem Scheitel C. Dabei wird der Schwerpunkt der ganzen Masse aus der Anfangslage S längs einer Kurve gegen die Endlage C sich bewegen, und diese Kurve ist, wie nun erwiesen werden soll, die oben erwähnte Parabel.

Fig. 84.



Angenommen, der Schwerpunkt der ganzen Masse befinde sich in P, wenn der Strahl die Lage CL erlangt hat; während dieser in die benachbarte Lage CL' fortschreitet, führt P eine elementare Bewegung PP' aus, die parallel ist CL, weil der Schwerpunkt s des Massenelementes CLL' längs CL nach C rückt. Die Grösse dieser Bewegung folgt aus der Proportion

$$PP' : \frac{2}{3} CL = CLL' : ABC,$$

nämlich

$$PP' = \frac{CLL'}{ABC} \cdot \frac{2}{3} CL.$$

Die Länge der während des ganzen Vorganges beschriebenen Kurve ist

$$arc\, CS = \Sigma PP' = \frac{1}{ABC} \Sigma CLL' \cdot \frac{2}{3} CL,$$

die Summierung auf die ganze Bewegung von CL ausgedehnt. Nun ist aber $\frac{2}{3} CL$ die mittlere Entfernung der Punkte des Elements CLL' von C, daher $CLL' \cdot \frac{2}{3} CL$ die Summe der Entfernungen der Punkte dieses Elementes von C, mithin $\Sigma CLL' \cdot \frac{2}{3} CL$ die analoge Summe für das ganze Drei-

eck ABC, folglich $\frac{1}{ABC} \cdot \Sigma CLL' \cdot \frac{2}{3} CL$ thatsächlich die mittlere Entfernung des Scheitels C von allen Punkten der Dreiecksfläche.

Um nachzuweisen, dass die Kurve CPS eine Parabel ist, beziehen wir sie auf ein Koordinatensystem, in welchem C Ursprung, CA Abscissenaxe und eine Parallele zu AB Ordinatenaxe ist; dann ist $CQ = x$, $QP = y$. Da P auf der Verbindungslinie des Schwerpunktes S' des Dreiecks ALC mit C liegen muss, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CQP, CAM die Proportion

$$1) \qquad x : y = b : \frac{AL}{2};$$

andererseits besteht, weil P der Schwerpunkt der in C vereinigten Masse des Dreiecks CLB und der in S' konzentrierten Masse des Dreiecks CAL ist, die Proportion

$$CP : PS' = CAL : CLB = AL : LB,$$

aus welcher

$$AL : (AL + LB) = CP : (CP + PS'),$$

oder

$$AL : c = CP : CS' = x : \frac{2}{3} b,$$

oder endlich

$$\frac{AL}{2} = \frac{3cx}{4b}$$

folgt. Substituiert man diesen Wert in die Gleichung 1), so ergiebt sich

$$x^2 = \frac{4b^2}{3c} y$$

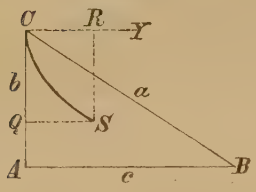
als Gleichung der Kurve CPS, welche sonach eine Parabel ist. Dass sie die Seite AC in C berührt und S in Richtung der Seite CB erreicht, ergiebt sich unmittelbar aus der vorangeschickten Betrachtung.

Macht man CD senkrecht zu AB, halbiert AD in E und verbindet E mit C, so wird die Parabel in einem Punkte O geschnitten; führt man durch diesen GFY parallel zu AB, so ist $OF = OG$, mithin O der Scheitel und OY die Axe der Parabel.

163. **Problem XII.** *Die mittlere Entfernung aller Punkte eines rechtwinkligen Dreiecks von einem Endpunkte der Hypotenuse zu berechnen.*

Lösung. Dem Satze Nr. 162 zufolge wird die verlangte mittlere Entfernung durch den Parabelbogen CS (Fig. 85) gemessen. Aus den Koordinaten seines Endpunktes S, d. i.

Fig. 85.



$$x = CQ = \frac{2}{3}b, \quad y = QS = \frac{1}{3}c,$$

erhält man den Parameter

$$2p = \frac{4}{3}\frac{b^2}{c}.$$

Die Länge des Bogens ist durch den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{x\sqrt{p^2+x^2}}{p} + pl\,\frac{x+\sqrt{p^2+x^2}}{p}\right\}$$

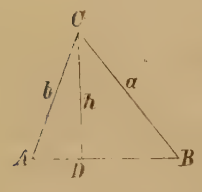
gegeben; führt man hier für x und p die oben angegebenen Werte ein, so ergiebt sich

$$M = \frac{1}{3}\left(a + \frac{b^2}{c}l \cdot \frac{a+c}{b}\right).$$

164. **Problem XIII.** *Die mittlere Entfernung der Punkte eines beliebigen Dreiecks von einem seiner Eckpunkte zu berechnen.*

Lösung. Man zerlege das gegebene Dreieck ABC (Fig. 86) durch die von der betreffenden Ecke C gefällte Höhe $CD = h$ in zwei rechtwinklige Dreiecke. Bezeichnet M_1 die mittlere Entfernung der Ecke C von den Punkten des Dreiecks ADC, M_2 die analoge Grösse in Bezug auf das Dreieck DBC, so ist der verlangte Mittelwert

Fig. 86.



$$M = \frac{M_1 \cdot ADC + M_2 \cdot DBC}{ABC} = \frac{M_1 \cdot AD + M_2 \cdot DB}{c}.$$

Setzt man hier für M_1, M_2 die nach der Schlussformel von Nr. 163 gebildeten Werte ein, so wird

$$M = \frac{1}{3c}\left(b \cdot AD + h^2 l \cdot \frac{b + AD}{h} + a \cdot BD + h^2 l \cdot \frac{a + BD}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{3c}\left(b \cdot AD + a \cdot BD + h^2 l \cdot \frac{(b + AD)(a + BD)}{h^2}\right);$$

nun ist

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2c \cdot BD,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot AD,$$

daraus nach einigen Umformungen

$$b \cdot AD + a \cdot BD = c\frac{a+b}{2} + \frac{(a^2 - b^2)(a - b)}{2c},$$

$$\frac{(b + AD)(a + BD)}{h^2} = \frac{a+b+c}{a+b-c},$$

so dass schliesslich

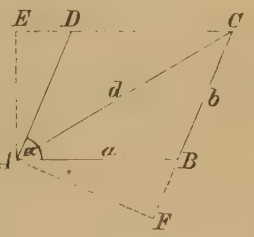
1) $$M = \frac{1}{3}\left\{\frac{a+b}{2} + \frac{(a^2 - b^2)(a - b)}{2c^2} + \frac{h^2}{c} l \cdot \frac{a+b+c}{a+b-c}\right\}.$$

Für ein gleichseitiges Dreieck von der Seite a ergiebt sich

2) $$M = \frac{a}{3}\left(1 + \frac{3}{4} l 3\right).$$

165. **Problem XIV.** *Die mittlere Entfernung der Punkte eines Parallelogramms von einem seiner Eckpunkte zu finden.*

Fig. 87.



Lösung. Sei $ABCD$ (Fig. 87) das Parallelogramm, $AB = DC = a$, $AD = BC = b$, Winkel $BAD = \alpha$. Soll der gesuchte Mittelwert auf den Eckpunkt A sich beziehen, so zerlege man das Parallelogramm durch die Diagonale $AC = d$ in Dreiecke; wenn M_1, M_2 die auf diese Dreiecke ABC, ACD bezüglichen Mittelwerte sind, so ist der verlangte Mittelwert

$$M = \frac{M_1 + M_2}{2}.$$

Setzt man nun für M_1, M_2 die nach Vorschrift der Formel 1), Nr. 164, gebildeten Werte ein, so ist zunächst

$$M = \frac{1}{6}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a+d}{2} + \dfrac{(d^2-a^2)(d-a)}{2b^2} + \dfrac{a^2\sin^2\alpha}{b}\, l\cdot\dfrac{a+d+b}{a+d-b} \\ + \dfrac{b+d}{2} + \dfrac{(d^2-b^2)(d-b)}{2a^2} + \dfrac{b^2\sin^2\alpha}{a}\, l\cdot\dfrac{b+d+a}{b+d-a} \end{array}\right\};$$

beachtet man die Beziehungen

$$d^2 - a^2 = b^2 + 2ab\cos\alpha, \quad d^2 - b^2 = a^2 + 2ab\cos\alpha$$

so wird

$$1)\quad \left\{\begin{array}{l} M = \dfrac{1}{6}\left\{2d + \dfrac{a^2+b^2}{ab}\, d\cos\alpha - \dfrac{a^3+b^3}{ab}\cos\alpha + \dfrac{a^2\sin^2\alpha}{b}\, l\cdot\dfrac{a+d+b}{a+d-b}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{b^2\sin^2\alpha}{a}\, l\cdot\dfrac{b+d+a}{b+d-a}\right\}. \end{array}\right.$$

Für ein Rechteck wird einfacher

$$2)\quad M = \frac{1}{3}\left\{d + \frac{b^2}{2a}\, l\cdot\frac{a+d}{b} + \frac{a^2}{2b}\, l\cdot\frac{b+d}{d}\right\}.$$

Daraus folgt beispielsweise die mittlere Entfernung der Punkte eines Quadrates, dessen Seite a ist, von einem Eckpunkte

$$3)\quad M = \frac{a}{6}\left\{2\sqrt{2} + l\cdot(1+\sqrt{2})\right\},$$

und vom Mittelpunkte

$$4)\quad M' = \frac{M}{2} = \frac{a}{12}\left\{2\sqrt{2} + l\cdot(1+\sqrt{2})\right\}.$$

166. **Problem XV.** *Die mittlere Entfernung zweier beliebiger Punkte eines gegebenen Rechtecks zu berechnen.*

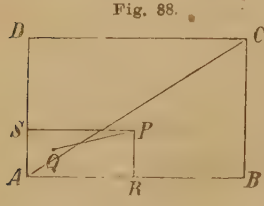


Fig. 88.

Lösung. $ABCD$ (Fig. 88) sei das gegebene Rechteck, $AB = a$, $AD = b$, $AC = d$, P einer der beiden willkürlich gewählten Punkte, $AR = x$, $AS = y$. Hält man den Punkt P fest* und beschränkt den andern, Q, auf das Rechteck $ARPS$, so ist die Summe der bezüglichen Entfernungen PQ ausgedrückt durch

* Genauer gesprochen: beschränkt man ihn auf das anstossende Element $dx\,dy$ des Rechtecks.

$$m\,x\,y\,dx\,dy,$$

wenn m die mittlere Entfernung des Punktes P von allen Punkten des Rechtecks $ARPS$ bedeutet. Um nun alle Punktepaare zu erschöpfen, hat man den angeschriebenen Ausdruck innerhalb der Grenzen 0 und a in Bezug auf x und 0 und b in Bezug auf y zu integrieren und das Resultat mit 4 zu multiplizieren. Da aber andererseits die Summe aller Entfernungen PQ ausgedrückt ist durch $a^2 b^2 M$, wenn M ihren Mittelwert bedeutet, so hat man zur Auffindung eben dieses Wertes die Gleichung

$$a^2 b^2 M = 4 \int_0^a \int_0^b m\,x\,y\,dx\,dy,$$

aus welcher, wenn man für m den nach Formel 2), Nr. 165, gebildeten Ausdruck einsetzt,

$$M = \frac{4}{3a^2b^2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{2x} l \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y} + \frac{x^2}{2y} l \cdot \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} \right\} x\,y\,dx\,dy$$

folgt.

Für das erste Integral findet man leicht

$$\int_0^a \int_0^b \sqrt{x^2+y^2}\; x\,y\,dx\,dy = \frac{d^5 - a^5 - b^5}{15};$$

bei dem zweiten führt, wenn man zuerst in Bezug auf y integriert, partielle Integration zum Ziele, indem man setzt:

$$y^3\,dy = du, \quad l \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y} = v;$$

es wird nämlich

$$\int_0^a \int_0^b \frac{y^3}{2} l \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}\,dx\,dy = \frac{ab^4}{8} l \cdot \frac{a+d}{b} - \frac{b^4 d}{8} + \frac{b^5}{10} + \frac{a^5}{60} + \frac{b^2 - 2a^2}{72} d^3 + \frac{d^5}{90};$$

der Wert des dritten Integrals ergiebt sich aus diesem durch Vertauschung der Buchstaben a und b.

Setzt man die eben gefundenen drei Werte in die obige Gleichung für M ein, so ergiebt sich nach entsprechender Reduktion:

$$1)\quad M=\frac{1}{15}\left\{\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}+d\left(3-\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{b^2}{a}l\cdot\frac{a+d}{b}+\frac{a^2}{b}l\cdot\frac{b+d}{a}\right)\right\}.$$

Für ein Quadrat, dessen Seite a ist, hat man einfacher

$$2)\quad M=\frac{a}{15}(2+\sqrt{2}+5l\,.\,[1+\sqrt{2}]).$$

167. **Problem XVI.** *Die mittlere Entfernung zweier Punkte zu finden, welche innerhalb einer beliebigen konvexen und geschlossenen Kurve willkürlich angenommen werden.*

Lösung. Die Länge der Kurve sei L, die von ihr eingeschlossene Fläche J.

Geht man von einer Lage der Punkte P, Q aus, bei welcher sie die Entfernung z haben, bezeichnet das Flächenelement bei P mit dP, bei Q mit dQ, so ist

$$1)\quad M=\frac{\int\int z\,dP\,dQ}{J^2},$$

beide Integrationen im Zähler auf die ganze Fläche ausgedehnt.

Andererseits ist

$$\frac{2z}{L}\cdot\frac{dP\,dQ}{J^2}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig gezogene Sekante der Kurve die Punkte P, Q bei der angenommenen Lage derselben trennt, und die vollständige Wahrscheinlichkeit für alle Lagen der Punkte P, Q lautet:

$$2)\quad \omega=\frac{2}{L}\cdot\frac{\int\int z\,dP\,dQ}{J^2},$$

die Integrationen in derselben Weise ausgedehnt wie oben. Durch Vergleichung von 1) und 2) ergiebt sich

$$3)\quad \omega=\frac{2M}{L},$$

durch welche Gleichung das vorliegende Problem über Mittelwerte mit jenem Nr. 121 über Wahrscheinlichkeiten in Zusammenhang gebracht ist, so dass mit dem einen auch das andere gelöst erscheint.

Für die in Rede stehende Wahrscheinlichkeit kann aber noch ein anderer Ausdruck abgeleitet werden. Betrachtet man nämlich eine besondere Lage der Sekante, welcher in Bezug auf einen innerhalb der Kurve gewählten Pol die Koordinaten p, θ zukommen und welche die Fläche in die Segmente Σ, Σ' zerlegt, so drückt sich die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden willkürlich angenommenen Punkte auf verschiedene Seiten der Sekante zu liegen kommen, wie folgt aus:

$$2\frac{dp\,d\theta}{L}\,\frac{\Sigma\Sigma'}{J^2};$$

die vollständige Wahrscheinlichkeit ist demnach

4) $$\omega = \frac{2}{LJ^2}\int\int \Sigma\Sigma'\,dp\,d\theta,$$

die Integration auf alle Sekanten der Kurve ausgedehnt. Aus der Vergleichung von 3) und 4) folgt

5) $$M = \frac{1}{J^2}\int\int \Sigma\Sigma'\,dp\,d\theta.$$

In Nr. 121 Gleichung α) wurde aber gefunden

$$\omega = \frac{1}{3LJ^2}\int\int C^4\,dp\,d\theta,$$

wobei C die Länge der auf der Sekante ausgeschnittenen Sehne bedeutet. Dies führt im Zusammenhalte mit 4) auf die bemerkenswerte Beziehung

6) $$\int\int C^4\,dp\,d\theta = 6\int\int \Sigma\Sigma'\,dp\,d\theta,$$

welche wieder in Verbindung mit 5) einen neuen Ausdruck für M liefert, nämlich

7) $$M = \frac{1}{6J^2}\int\int C^4\,dp\,d\theta.$$

Als erstes Beispiel diene die mittlere Entfernung zweier Punkte eines gleichseitigen Dreiecks. Mit Hilfe des in Nr. 123 gefundenen Wahrscheinlichkeitswertes

$$\omega = \frac{2}{15} + \frac{1}{10}l\cdot 3$$

erhält man nämlich auf Grund der Formel 3):

$$M = \frac{3a}{5}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}l\,3\right),$$

wenn mit a die Länge der Dreiecksseite bezeichnet wird.

Als zweites Beispiel möge die Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür dienen, dass eine beliebig gezogene, den Umfang eines Quadrates schneidende Gerade zwei in seiner Fläche willkürlich angenommene Punkte trennt. Mit Benutzung von Formel 3) und des in Nr. 166 Gleichung 2) für M gefundenen Wertes ergiebt sich

$$\omega = \frac{1}{30}(2 + \sqrt{2} + 5l\cdot[1 + \sqrt{2}]).$$

168. **Theorem VI.** *Die mittlere Entfernung der Punkte einer ebenen Figur von einer in ihrer Ebene angeordneten, den Umfang der Figur nicht schneidenden Geraden ist gleich der Entfernung des Schwerpunktes der Figur von dieser Geraden.*

Beweis. Man denke sich die Figur durch gerade Linien parallel der gegebenen Geraden in Elementarstreifen zerlegt; ist dJ derjenige Streifen, dessen Begrenzungslinien die Abstände y und $y + dy$ von der Geraden haben, so ist

$$M = \frac{\int\int y\,dJ}{\int\int dJ} = Y,$$

der verlangte Mittelwert, also, da beide Integrationen über die ganze Fläche der Figur auszudehnen sind, thatsächlich gleich dem Abstande des Schwerpunktes von der gegebenen Geraden.

169. **Problem XVII.** *Eine begrenzte Gerade wird willkürlich in drei Teile geteilt; es ist der Mittelwert des grössten, mittleren und kleinsten Teiles zu finden.*

Lösung. Es sei a die Länge der Geraden; werden die Teile in abnehmender Grösse mit x, y, $z = a - x - y$ bezeichnet, so ist

$$1) \qquad x > y > a - x - y > 0.$$

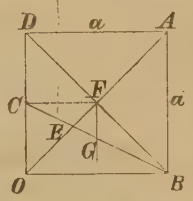
Betrachtet man x, y als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes P in Bezug auf die Axen OA, OB (Fig. 89, S. 207), so muss sich der Punkt P, wenn x, y den Bedingungen 1)

entsprechen sollen, auf jenes Dreieck BEF beschränken, welches von den Geraden

$$OA \ldots x = y,$$
$$BC \ldots y = a - x - y,$$
$$BD \ldots a - x - y = 0$$

gebildet wird. Dem Satze Nr. 168 zufolge ist also der Mittelwert von x die Abscisse, der Mittelwert von y die Ordinate des Schwerpunktes dieses Dreiecks, dessen Ecken die Koordinaten $B(a, 0)$, $E\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a\right)$, $F\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$ haben, d. h. es ist:

Fig. 89.



$$2) \quad \begin{cases} M_x = \frac{1}{3}\left(a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}a\right) = \frac{11}{18}a, \\ M_y = \frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}a\right) = \frac{5}{18}a, \\ M_z = \frac{2}{18}a. \end{cases}$$

170. **Problem XVIII.** *Welchen Mittelwert hat die grösste, beziehungsweise mittlere und kleinste Seite aller Dreiecke von gegebenem Umfange?*

Lösung. Behält man die Bezeichnungen der vorigen Nummer bei, indem jetzt a den gegebenen Umfang bedeutet, so kommt zu den Relationen 1) noch die weitere

$$2) \quad x \leqq y + (a - x - y)$$

hinzu, welche in der geometrischen Interpretation (Fig. 89) auf eine Gerade

$$GF \ldots x = \frac{a}{2}$$

führt, welche mit den früher genannten das Dreieck EFG als Gebiet derjenigen Punkte P abschliesst, deren Koordinaten den Bedingungen 1), Nr. 169, und 2), Nr. 170, genügen. Demnach ist auf Grund des Satzes Nr. 168:

3)
$$\begin{cases} M_x = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\right) = \frac{16}{36}a, \\ M_y = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a\right) = \frac{13}{36}a, \\ M_z = \frac{7}{36}a. \end{cases}$$

171. **Problem XIX.** *Die mittlere Entfernung eines Punktes der Kugeloberfläche von allen Punkten innerhalb der Kugel zu berechnen.*

Lösung. Man denke sich die Kugel durch Rotation eines Halbkreises um seinen Durchmesser $AB = 2r$ entstanden. Sind ϱ, θ die Polarkoordinaten eines Punktes in der Halbkreisfläche in Bezug auf AB als Polaraxe und den Punkt A als Pol, so beschreibt das Flächenelement $\varrho\, d\theta\, d\varrho$ bei der Rotation ein Raumelement $2\pi\varrho \sin\theta \,.\, \varrho\, d\theta\, d\varrho = 2\pi\varrho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varrho$, dessen sämtliche Punkte von A den Abstand ϱ besitzen. Die verlangte mittlere Entfernung ist also

$$M = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2r\cos\theta} 2\pi\varrho^3 \sin\theta\, d\theta\, d\varrho}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 6r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin\theta\, d\theta = \frac{6}{5}r.$$

172. **Problem XX.** *Die mittlere Entfernung zweier Punkte zu finden, welche in dem Raume einer gegebenen Kugel beliebig angenommen werden.*

Lösung. Da $\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^2$ die Anzahl aller Punktepaare oder Entfernungen, so ist, wenn M den Mittelwert der letzteren bezeichnet,

1)
$$S = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^2 M$$

ihre Summe. Diese Summe ändert sich um dS, wenn der Halbmesser der Kugel um dr zunimmt; es treten nämlich zu S jene Entfernungen hinzu, welche den einen oder den andern Endpunkt in der hinzugefügten Kugelschale haben. Für ihre Summe ergiebt sich aber, wenn M_0 den Mittelwert

der Entfernungen eines Punktes der Kugeloberfläche von allen Punkten des Kugelraumes bedeutet, der Ausdruck

$$2 \cdot 4\pi r^2 dr \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 M_0,$$

so dass, wenn man für M_0 den in Nr. 171 gefundenen Wert einsetzt:

$$dS = \frac{64}{5} \pi^2 r^6 dr.$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Integration

2) $$S = \frac{64}{5} \pi^2 \int_0^r r^6 dr = \frac{64}{35} \pi^2 r^7,$$

und aus 1) und 2) ergiebt sich endlich

3) $$M = \frac{36}{35} r.$$

173. **Theorem VII.** *Die mittlere Entfernung der Punkte eines Körpers von einer Ebene, die seine Oberfläche nicht schneidet, kommt gleich der Entfernung seines Schwerpunktes von dieser Ebene.*

Beweis. Wird nämlich der Körper durch Ebenen, welche parallel sind der gegebenen, in unendlich dünne Schichten zerlegt und ist dV der Inhalt jener Schichte, deren Begrenzungsebenen von der gegebenen Ebene die Abstände y und $y + dy$ haben, so ergiebt sich für den verlangten Mittelwert der Ausdruck

$$M = \frac{\int y\, dV}{\int dV} = Y,$$

beide Integrationen über den ganzen Körper ausgedehnt. Die Bedeutung von Y entspricht thatsächlich dem aufgestellten Satze.

174. **Problem XXI.** *Die Mittelwerte der nach ihrer Grösse geordneten Seiten aller Dreiecke zu berechnen, deren Seiten zwischen gegebenen Grenzen* a *und* b *liegen.*

Lösung. Die in aufsteigender Grösse geordneten Seiten eines der Dreiecke mögen mit x, y, z bezeichnet werden; alsdann sind sie an folgende Bedingungen gebunden:

1) $x \geqq a,$

2) $z \leqq b,$

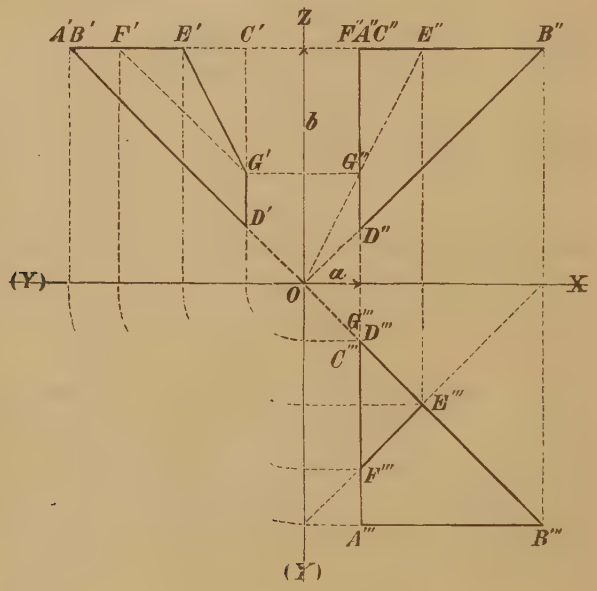
3) $x \leqq y,$

4) $y \leqq z,$

5) $z \leqq x + y.$

Werden x, y, z als rechtwinklige Raumkoordinaten eines Punktes angesehen, so erfüllen die Punkte, welche den Be-

Fig. 90.



dingungen 1) bis 5) genügen, den Raum eines Pentaeders oder Tetraeders, dessen Begrenzungsebenen durch die Beziehungen 1) bis 5) resp. 1) bis 4) dargestellt werden, wenn man darin das Gleichheitszeichen gelten lässt.* Die Koordinaten des Schwerpunktes dieses Körpers sind dem Satze Nr. 173 zufolge die Mittelwerte von x, y, z.

1. Ist $b > 2a$, so begrenzen die Ebenen 1) bis 5) ein Pentaeder $ABDGEF$, das in Fig. 90 durch seine Projektionen auf den drei Koordinatenebenen dargestellt ist und

* Vergl. Nr. 15.

als Differenz der Tetraeder $ABCD$ und $EFCG$ angesehen werden kann. Die Rauminhalte dieser Tetraeder sind

$$6) \qquad \begin{cases} V = \frac{1}{6}(b-a)^3, \\ V' = \frac{1}{12}(b-2a)^3, \end{cases}$$

und da ihre Eckpunkte die aus der Figur leicht abzulesenden Koordinaten

	x	y	z
A	a	b	b
B	b	b	b
C	a	a	b
D	a	a	a
E	$\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}b$	b
F	a	$b-a$	b
G	a	a	$2a$

haben, so kommen dem Schwerpunkte des Tetraeders $ABCD$ die Koordinaten

$$7) \qquad \begin{cases} X = \frac{a+b+a+a}{4} = \frac{1}{3}(3a+b), \\ Y = \frac{b+b+a+a}{4} = \frac{1}{2}(a+b), \\ Z = \frac{b+b+b+a}{4} = \frac{1}{4}(a+3b), \end{cases}$$

dem Schwerpunkte des Tetraeders $EFCG$ die Koordinaten

$$7') \qquad \begin{cases} X' = \frac{\frac{1}{2}b+a+a+a}{4} = \frac{1}{4}(3a+\frac{1}{2}b), \\ Y' = \frac{\frac{1}{2}b+(b-a)+a+a}{4} = \frac{1}{4}(a+\frac{3}{2}b), \\ Z' = \frac{b+b+b+2a}{4} = \frac{1}{4}(2a+3b) \end{cases}$$

zu. Daraus ergeben sich mit Zuziehung der Volumina 6) die Koordinaten des Schwerpunktes des Pentaeders $ABDGEF$ oder die Mittelwerte der Seiten x, y, z:

$$8)\quad \begin{cases} M(x) = \dfrac{VX - V'X'}{V - V'} = \dfrac{\frac{1}{4}(3a+b)(b-a)^3 - \frac{1}{16}(6a+b)(b-2a)^3}{(b-a)^3 - \frac{1}{2}(b-2a)^3}, \\ M(y) = \dfrac{VY - V'Y'}{V - V'} = \dfrac{\frac{1}{2}(a+b)(b-a)^3 - \frac{1}{16}(2a+3b)(b-2a)^3}{(b-a)^3 - \frac{1}{2}(b-2a)^3}, \\ M(z) = \dfrac{VZ - V'Z'}{V - V'} = \dfrac{\frac{1}{4}(a+3b)(b-a)^3 - \frac{1}{8}(2a+3b)(b-2a)^3}{(b-a)^3 - \frac{1}{2}(b-2a)^3}. \end{cases}$$

Die Ausdrücke vereinfachen sich in etwas, wenn man

$$1 - \frac{a}{b} = \alpha, \qquad 1 - \frac{2a}{b} = \beta$$

setzt; sie lauten dann

$$8')\quad \begin{cases} M(x) = b\,\dfrac{\alpha^3 - \frac{1}{4}\beta^3 - \frac{3}{4}(\alpha^4 - \frac{1}{4}\beta^4)}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3}, \\ M(y) = b\,\dfrac{\alpha^3 - \frac{1}{4}\beta^3 - \frac{2}{4}(\alpha^4 - \frac{1}{4}\beta^4)}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3}, \\ M(z) = b\,\dfrac{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3 - \frac{1}{4}(\alpha^4 - \frac{1}{2}\beta^4)}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3}. \end{cases}$$

2. Wenn $b < 2a$ ist, so begrenzen die Ebenen 1) bis 4) [die citierten Relationen mit dem unteren Zeichen gelesen] das Tetraeder $ABCD$; die Ebene 5) geht an demselben vorüber. Die Mittelwerte von x, y, z fallen also mit den Werten von X, Y, Z in 7) überein, so dass

$$9)\quad \begin{cases} M(x) = \dfrac{1}{4}(3a + b), \\ M(y) = \dfrac{1}{2}(a + b), \\ M(z) = \dfrac{1}{4}(a + 3b). \end{cases}$$

Die dem Grenzfalle $b = 2a$ entsprechenden Mittelwerte ergeben sich sowohl aus den Formeln 8) als 9), nämlich:

$$10)\quad M(x) = \frac{5}{8}b, \qquad M(y) = \frac{6}{8}b, \qquad M(z) = \frac{7}{8}b.$$

175. **Theorem VIII.** *Bezeichnet* V *ein der Willkür unterworfenes variables Gebiet (Linie, Fläche, Raum), welches von einem andern unveränderlichen Gebiete* A *eingeschlossen wird;*

ist M(V) *der Mittelwert von* V, p *die totale Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein willkürlich in* A *angenommener Punkt in das Gebiet* V *fällt, so gilt die Beziehung:*

$$p = \frac{M(V)}{A}.$$

Beweis. Die Werte von V entsprechen den Werten oder Wertverbindungen einer stetigen Mannigfaltigkeit einer oder mehrerer Variabeln, welche K heissen möge. Ist dK das an einen beliebig herausgegriffenen Wert V anstossende Element dieser Mannigfaltigkeit, so ist bei diesem besonderen Werte V die fragliche Wahrscheinlichkeit ausgedrückt durch

$$\frac{dK}{K}\frac{V}{A};$$

ihr vollständiger Wert ist demnach

$$p = \frac{1}{A}\frac{\int V\,dK}{K},$$

die Integration über das ganze Wertgebiet von K ausgedehnt. Nun stellt aber $\frac{\int V\,dK}{K}$ den Mittelwert von V vor, mithin ist thatsächlich

1) $$p = \frac{M(V)}{A}.$$

Zusatz. Durch eine ähnliche Betrachtung überzeugt man sich, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass n in A willkürlich angenommene Punkte auch in das Gebiet V fallen, gleichkommt

2) $$p = \frac{M(V^n)}{A^n},$$

wenn unter $M(V^n)$ der Mittelwert von V^n verstanden wird.

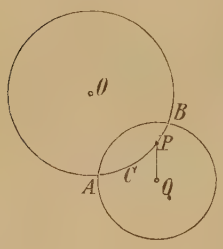
176. **Problem XXII.** *Auf einen gegebenen festen Kreis wird ein zweiter Kreis willkürlich geworfen. Es ist die mittlere Länge des Bogens zu berechnen, welchen der zweite Kreis vom Umfange des ersten bedeckt.*

Lösung. Es sei O (Fig. 91, S. 214) der Mittelpunkt, R der Halbmesser des festen, Q der Mittelpunkt des beweglichen Kreises, r sein Halbmesser; dann ist $ACB = s$ der

Bogen, der durch den zweiten Kreis bedeckt wird. Ein solcher Bogen ergiebt sich

1. bei $r < R$ nur dann, wenn Q in einen Kreisring fällt, welcher durch zwei aus O mit den Halbmessern $R + r$ und $R - r$ beschriebene Kreise begrenzt wird;

Fig. 91.



2. bei $r > R$, wenn Q in einen aus O mit dem Halbmesser $R + r$ beschriebenen Kreis fällt (hier wird in einer Gruppe von Fällen der ganze Umfang des festen Kreises gedeckt).

Denkt man sich auf dem Umfange des festen Kreises einen Punkt P willkürlich angenommen, so ist dem Satze Nr. 175 zufolge

$$1) \qquad p = \frac{M(s)}{2\pi R}$$

die totale Wahrscheinlichkeit dafür, der Punkt P werde auf den Bogen s fallen.

Das eben erwähnte Ereignis ist aber identisch mit einem anderen, darin bestehend, dass, nachdem P bereits angenommen worden, der Mittelpunkt Q des geworfenen Kreises in eine Entfernung von P fällt, welche kleiner ist als r; bei dieser Auffassung ergiebt sich für p der Ausdruck

1. bei $r < R$:

$$2) \qquad p = \frac{\pi r^2}{\pi\{(R+r)^2 - (R-r)^2\}} = \frac{r}{4R},$$

2. bei $r > R$:

$$2') \qquad p = \frac{\pi r^2}{\pi(R+r)^2} = \left(\frac{r}{R+r}\right)^2.$$

Durch Gleichsetzung der Ausdrücke 1) und 2), resp 1) und 2') ergiebt sich der verlangte Mittelwert

$$3) \qquad M(s) = \frac{\pi r}{2} \qquad \text{für } r < R,$$

also unabhängig von der Grösse des festen Kreises,

$$4) \qquad M(s) = 2\pi R\left(\frac{r}{R+r}\right)^2 \qquad \text{für } r > R.$$

177. **Problem XXIII.** *In einer begrenzten Geraden von der Länge* a *werden zwei Punkte willkürlich angenommen; es ist der Mittelwert der* n^{ten} *Potenz ihrer Entfernung zu finden.*

Lösung. X, Y seien die beiden Punkte; ihre Entfernung heisse z. Man denke sich n weitere Punkte in der Geraden angenommen; die Wahrscheinlichkeit, dass sie sämtlich in die Strecke XY fallen, ist der Gleichung 2), Nr. 175, zufolge gleich

$$1) \qquad p = \frac{M(z^n)}{a^n}.$$

Andererseits aber ist p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den $(n+2)(n+1)$ möglichen Anordnungen der $(n+2)$ Punkte eine eintrifft, in welcher X, Y die beiden äussersten Punkte sind, und da es solcher Anordnungen zwei giebt, so ist

$$2) \qquad p = \frac{2}{(n+2)(n+1)}.$$

Aus der Vergleichung von 1) und 2) folgt

$$3) \qquad M(z^n) = \frac{2a^n}{(n+2)(n+1)}.$$

So ergiebt sich beispielsweise $M(z) = \frac{a}{3}$ übereinstimmend mit Nr. 154, $M(z^2) = \frac{a^2}{6}$, u. s. w.

178. **Problem XXIV.** *Den Mittelwert des Quadrates der in beliebiger Richtung gemessenen Entfernung eines Punktes innerhalb einer geschlossenen konvexen Kurve von dieser zu berechnen.*

Lösung. Ist ϱ die unter der Neigung θ (gegen eine feste Gerade) gemessene Entfernung, so ist

$$M = \frac{\int_0^{2\pi} \varrho^2 \, d\theta}{2\pi};$$

da aber $\int_0^{2\pi} \varrho^2 \, d\theta = 2J$, wenn J der Inhalt der Kurve, so ist der verlangte Mittelwert

$$M = \frac{J}{\pi},$$

oder gleich dem Quadrate des Halbmessers jenes Kreises, der mit der Kurve gleichen Flächeninhalt besitzt, wo auch der Ausgangspunkt der Entfernungen liegen mag.

Daraus folgt unmittelbar, dass die mittlere Fläche der Kreise, welche mit den hier betrachteten Entfernungen als Halbmesser beschrieben werden, dem Inhalte der gegebenen Kurve gleichkommt.

179. **Problem XXV.** *Es ist der Mittelwert der Quadrate der Entfernungen aller Punkte einer beliebig begrenzten ebenen Figur von einem gegebenen Punkte ihrer Ebene zu finden.*

Lösung. Ist dJ ein Element der gegebenen Figur, ϱ seine Entfernung von dem gegebenen Punkte, so ist

1) $$M = \frac{\int \varrho^2 dJ}{J},$$

die Integration über die ganze Figur ausgedehnt. Bezeichnet $\varkappa$ den Trägheitshalbmesser derselben in Bezug auf eine zu ihrer Ebene normale, durch den gegebenen Punkt gehende Axe, $\varkappa_0$ die analoge Grösse bezogen auf den Schwerpunkt der Figur, endlich Δ die Entfernung der eben erwähnten zwei Punkte, so schreibt sich Gleichung 1) in der Form

2) $$M = \varkappa^2 = \varkappa_0^2 + \Delta^2.$$

180. **Problem XXVI.** *In jedem von zwei beliebig begrenzten Teilen einer Ebene wird ein Punkt willkürlich angenommen; das mittlere Quadrat der Entfernung dieser Punkte zu berechnen.*

Lösung. Die Inhalte der beiden Figuren mögen mit J_1, J_2, ihre auf die respektiven Schwerpunkte bezogenen Trägheitshalbmesser mit $\varkappa_1, \varkappa_2$, die Entfernung der Schwerpunkte mit Δ bezeichnet werden. Hält man den einen der beliebigen Punkte fest, z. B. P in J_1, und bezeichnet mit ϱ seine Entfernung vom Schwerpunkte der Figur J_2, so ist das mittlere Quadrat seiner Entfernung von J_2 nach Gleichung 2), Nr. 179:

1) $$\mu = \varkappa_2^2 + \varrho^2,$$

demnach der verlangte Mittelwert

$$M = \frac{\int \mu \, dJ_1}{J_1},$$

die Integration über J_1 ausgedehnt. Führt man für μ den Wert aus Gleichung 1) ein, so wird:

$$2) \quad M = \frac{\int \varkappa_2^2 \, dJ_1 + \int \varrho^2 \, dJ_1}{J_1} = \varkappa_2^2 + \frac{\int \varrho^2 \, dJ_1}{J_1} = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \Delta^2.$$

181. **Problem XXVII.** *Das mittlere Quadrat der Entfernung zweier Punkte zu finden, welche in einer beliebig begrenzten ebenen Figur willkürlich angenommen werden.*

Lösung. Die Aufgabe ergiebt sich aus der vorhergehenden, wenn man dort die beiden Figuren J_1, J_2 als kongruent voraussetzt und zusammenfallen lässt. Es ist dann $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$ und $\Delta = 0$, daher der Gleichung 2) zufolge

$$M = 2\varkappa^2.$$

So ist beispielsweise das mittlere Quadrat der Entfernung zweier Punkte in der Fläche eines Kreises vom Halbmesser r gleich

$$M = r^2.$$

182. **Problem XXVIII.** *Den mittleren Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks zu finden.*

Lösung. Hält man einen Scheitel des Dreiecks ABC, z. B. A, und den Winkel α an diesem Scheitel fest, so entspricht jedem Dreiecke ABC ein Dreieck $A'BC$, und die Summe beider ist das Zweieck $ABA'CA$. Da aber der Mittelwert von ABC offenbar derselbe ist wie der von $A'BC$, so beträgt jeder die Hälfte des Zweiecks. Aus dieser Betrachtung folgt der verlangte Mittelwert

$$M = \frac{\int_0^\pi \frac{1}{2} ABA'CA \, . \, d\alpha}{\pi} = \frac{\int_0^\pi r^2 \alpha \, d\alpha}{\pi} = \frac{1}{2} \pi r^2,$$

d. i. gleich dem achten Teile der Kugelfläche oder dem Inhalte des dreifach rechtwinkligen Dreiecks.

Zusatz. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass vier auf einer Kugelfläche willkürlich angenommene Punkte auf derselben Halbkugel liegen?

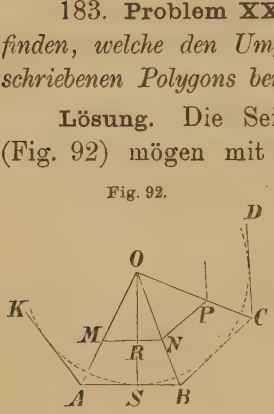
Verbindet man drei der Punkte, z. B. A, B, C durch ein Dreieck, so liegt der vierte, D, mit diesen drei nur dann auf einerlei Halbkugel, wenn er nicht in das Gegendreieck von ABC fällt. Da nun der Mittelwert dieses Dreiecks $\frac{1}{8}O$ beträgt, wenn O die Oberfläche der Kugel ist, so hat man dem Satze Nr. 175 zufolge

$$p = 1 - \frac{\frac{1}{8}O}{O} = \frac{7}{8}.$$

183. **Problem XXIX.** *Die mittlere Fläche der Kreise zu finden, welche den Umfang eines gegebenen einem Kreise umschriebenen Polygons berühren.*

Lösung. Die Seiten AB, BC, CD, ... des Polygons (Fig. 92) mögen mit $a, b, c \ldots$, der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises mit r bezeichnet werden; sein Mittelpunkt liege in O. Verbindet man die Endpunkte einer Seite, z. B. AB, mit O, zieht MN im Abstande $RS = x$ parallel zu AB, so wird die Summe der Inhalte aller Kreise vom Halbmesser x, welche die Seite AB berühren, ausgedrückt durch

Fig. 92.



$$\pi x^2 . MN . dx,$$

d. i. weil $MN = \frac{r - x}{r} a$, gleich

$$\frac{\pi a}{r} x^2 (r - x) dx;$$

daraus ergiebt sich die Summe der Flächen aller die Seite AB berührenden Kreise gleich

$$\frac{\pi a}{r} \int_0^r x^2 (r - x) dx = \frac{1}{12} \pi a r^3;$$

auf den ganzen Umfang des Polygons ausgedehnt giebt dies

$$\frac{1}{12} \pi r^3 (a + b + c + \ldots),$$

und da die Anzahl aller Kreise durch die Fläche des Polygons, d. i. durch $\frac{1}{2} r (a + b + c + \ldots)$ ausgedrückt wird, so ist der gesuchte Mittelwert

$$M = \frac{1}{6}\pi r^2,$$

oder gleich dem sechsten Teile der Fläche des dem Polygon eingeschriebenen Kreises.

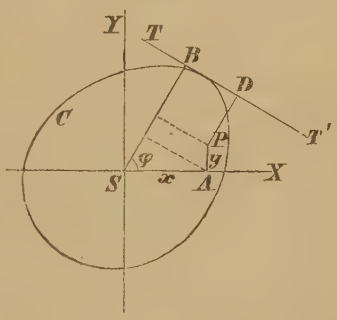
184. **Problem XXX.** *Die mittlere Fläche der Kreise zu finden, welche einem gegebenen, einem Kreise umschriebenen Polygon eingezeichnet werden können.*

Lösung. Die Mittelpunkte aller dem Polygon $ABC\ldots$ (Fig. 92) eingezeichneten Kreise, deren Halbmesser x ist, fallen in ein Polygon $MNP\ldots$, dessen Seiten den Seiten des gegebenen Polygons parallel sind im Abstande $RS = x$; da dieses Polygon dem gegebenen ähnlich ist, so ist $\frac{r}{2}(a+b+c+\ldots)\left(\frac{r-x}{r}\right)^2$ sein Inhalt und der verlangte Mittelwert

$$M = \frac{\frac{\pi}{2r}(a+b+c+\ldots)\int_0^r x^2(r-x)^2\,dx}{\frac{1}{2r}(a+b+c+\ldots)\int_0^r (r-x)^2\,dx} = \frac{1}{10}\pi r^2.$$

185. **Problem XXXI.** *Den mittleren Flächeninhalt der Fusspunktkurve einer gegebenen konvexen geschlossenen Kurve in Bezug auf einen beliebigen Punkt ihrer Fläche als Pol zu finden.*

Fig. 93.



Lösung. In Fig. 93 sei C die gegebene Kurve, S der Schwerpunkt, Ω der Inhalt der durch sie begrenzten Fläche, P der willkürlich angenommene Punkt; x, y sind seine Koordinaten in Bezug auf ein durch S als Ursprung gelegtes rechtwinkliges Axenkreuz. Bezeichnet V den Inhalt der auf P bezogenen Fusspunktkurve von C, so ist der gesuchte Mittelwert

1) $$M = \frac{1}{\Omega}\int\int V\,dx\,dy.$$

Betrachtet man eine beliebige Tangente von C, z. B. TT', fällt zu ihr aus P und S die Lote $PD = \varrho$ und $SB = r$, so erscheinen diese als Radienvektoren der auf P und S bezogenen Fusspunktkurven von C. Ist Winkel $XSB = \varphi$, so hat man

$$V = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varrho^2 \, d\varphi,$$

oder wegen $\varrho = r - x\cos\varphi - y\sin\varphi$ auch

$$V = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 \, d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 \, d\varphi - \int_0^{2\pi} r(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 \, d\varphi + \frac{1}{2}\pi(x^2+y^2) - \int_0^{2\pi} r(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\, d\varphi.$$

Der erste Teil der rechten Seite drückt den Flächeninhalt der zum Schwerpunkte S als Pol gehörigen Fusspunktkurve von C aus; bezeichnet man diesen mit J, so ergiebt sich durch Einsetzung des Wertes für V in die Gleichung 1):

$$2)\quad M = J + \frac{\pi}{2\Omega}\iint (x^2+y^2)\, dx\, dy - \frac{1}{\Omega}\iiint_0^{2\pi} r(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\, dx\, dy\, d\varphi.$$

Nun aber repräsentiert das Doppelintegral des zweiten Gliedes das Trägheitsmoment der Fläche von C in Bezug auf eine durch S gehende, zur Ebene von C normal gerichtete Axe; wird der zugehörige Trägheitshalbmesser mit $\varkappa$ bezeichnet, so ist

$$3)\quad \iint (x^2+y^2)\, dx\, dy = \Omega\varkappa^2;$$

das Integral im dritten Gliede verschwindet, weil bei dem gewählten Axenkreuz

$$4)\quad \iint x\, dx\, dy = \iint y\, dx\, dy = 0$$

ist. Setzt man die Werte aus 3) und 4) in 2) ein, so wird schliesslich

5) $$M = J + \frac{1}{2}\pi\varkappa^2,$$

d. h. der Mittelwert der Flächeninhalte aller Fusspunktkurven kommt gleich dem Inhalte der auf den Schwerpunkt bezogenen Fusspunktkurve vermehrt um die halbe Fläche eines Kreises, welcher den zum Schwerpunkte gehörigen Trägheitshalbmesser zum Radius hat.

Ist die gegebene Kurve ein Kreis vom Halbmesser r, so ist

$$J = \pi r^2, \qquad \varkappa^2 = \frac{1}{2}r^2,$$

daher $M = \frac{5}{4}\pi r^2$.

Für eine Ellipse mit den Halbaxen a, b findet man nach einfacher Rechnung

$$J = \frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2), \qquad \varkappa^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2),$$

und daraus $M = \frac{5}{8}\pi(a^2 + b^2)$.

186. **Problem XXXII.** *Den mittleren Flächeninhalt aller Dreiecke von gegebenem Umfang und gegebener Basis zu berechnen.*

Lösung. Wird die Basis mit a, die Summe der beiden andern Seiten mit b, eine dieser Seiten mit x bezeichnet, so ist der Inhalt des Dreiecks gleich

$$\left\{\frac{a+b}{2}\cdot\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\frac{a+b}{2}-b+x\right)\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\{a^2-(b-2x)^2\}^{\frac{1}{2}},$$

und sein Mittelwert, da x an die Bedingungen

$$a + x > b - x, \qquad a + b - x > x$$

gebunden ist:

$$M = \frac{\frac{1}{4}(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{b-a}{2}}^{\frac{b+a}{2}}\{a^2-(b-2x)^2\}^{\frac{1}{2}}\,dx}{a} = \frac{1}{16}\pi a\sqrt{b^2-a^2}.$$

187. **Problem XXXIII.** *Den mittleren Inhalt aller Dreiecke von gegebenem Umfange zu finden.*

Lösung. Bezeichnet man den gegebenen Umfang mit $2s$, zwei der Seiten mit x, y, so ist der Inhalt des Dreiecks ausgedrückt durch

$$\{s(s-x)(s-y)(x+y-s)\}^{\frac{1}{2}};$$

da nun x, y unter der Voraussetzung $x > y$ an die Bedingungen

$$x + y > s, \quad x < s$$

gebunden sind, so ist der verlangte Mittelwert

$$M = \frac{\int_0^s \int_{s-y}^{s} \{s(s-x)(s-y)(x+y-s)\}^{\frac{1}{2}}\, dy\, dx}{\int_0^s \int_{s-y}^{s} dy\, dx}$$

$$= \frac{2}{s^2}\int_0^s \{s(s-y)\}^{\frac{1}{2}}\, dy \int_{s-y}^{s} \sqrt{s(y-s) + (2s-y)x - x^2}\, dx$$

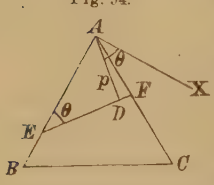
$$= \frac{2}{s^2}\int_0^s \{s(s-y)\}^{\frac{1}{2}} \frac{y^2}{8}\, dy \int_{s-y}^{s} \frac{dx}{\sqrt{s(y-s) + (2s-y)x - x^2}}$$

$$= \frac{\pi}{4s^2}\int_0^s y^2 \{s(s-y)\}^{\frac{1}{2}} dy = \frac{\pi}{2s^5}\int_0^s (s^2 - z^2)^2 z^2\, dz = \frac{\pi}{105}(2s)^2.$$

Es sind dies $\frac{36}{35}$ vom Inhalte jenes Kreises, welcher dem gleichseitigen unter den Dreiecken eingeschrieben ist.

188. **Problem XXXIV.** *Die mittlere Fläche jenes Dreiecks zu finden, welches von einem gegebenen gleichseitigen durch eine willkürlich gezogene Gerade abgeschnitten wird.*

Fig. 94.



Lösung. Ist ABC (Fig. 94) das gegebene Dreieck, s die Länge einer Seite desselben, EF die willkürlich gezogene Gerade mit den auf A und eine zu AB senkrechte Axe AX bezogenen Koordinaten p, θ, V der Inhalt des Dreiecks AEF, so hat man

1) $$M = \frac{\iint V\, dp\, d\theta}{\iint dp\, d\theta}.$$

Wird $AE = x$ gesetzt, so ist

$$V = \frac{x^2 \sin \frac{1}{3}\pi \sin\theta}{2 \sin(\frac{1}{3}\pi + \theta)} = \frac{x^2\sqrt{3} \sin\theta}{4 \sin(\frac{1}{3}\pi + \theta)},$$

$$p = x \sin\theta, \qquad dp = dx \sin\theta;$$

setzt man diese Werte in Gleichung 1) ein und beschränkt im Hinblick auf die Regelmässigkeit der Figur die Integration in Bezug auf θ auf das Intervall 0 bis $\frac{1}{3}\pi$, so ergiebt sich

$$M = \frac{\int_0^s \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \frac{x^2\sqrt{3} \sin^2\theta}{4 \sin(\frac{1}{3}\pi + \theta)} dx\, d\theta}{\int_0^s \int_0^{\frac{1}{3}\pi} dx \sin\theta\, d\theta} = \frac{s^2\sqrt{3}}{6} \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \frac{\sin^2\theta}{\sin(\frac{1}{3}\pi + \theta)} d\theta.$$

Bei dem übrigbleibenden Integral führt die Substitution $\frac{1}{3}\pi + \theta = \vartheta$ zum Ziele; man erhält

$$\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \frac{\sin^2\theta}{\sin(\frac{1}{3}\pi + \theta)} d\theta = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{\sin^2(\vartheta - \frac{1}{3}\pi)}{\sin\vartheta} d\vartheta = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \left\{ \frac{1}{4} \sin\vartheta - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos\vartheta + \frac{3}{4} \frac{\cos^2\vartheta}{\sin\vartheta} \right\} d\vartheta$$

$$= \left\{ -\frac{1}{4} \cos\vartheta - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin\vartheta + \frac{3}{4} l \cdot tang \frac{1}{2}\vartheta \right\}_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} = \frac{1}{4}(3l \cdot 3 - 2).$$

Mithin ist schliesslich

$$2) \qquad M = \frac{s^2\sqrt{3}}{24}(3l \cdot 3 - 2).$$

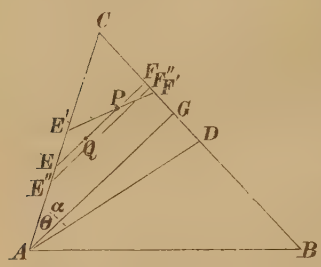
189. **Problem XXXV.** *In der Fläche eines gegebenen Dreiecks werden zwei Punkte willkürlich angenommen und durch eine Gerade verbunden. Den mittleren Inhalt des grösseren der beiden Teile zu finden, in welche das Dreieck durch diese Gerade zerlegt wird.*

Lösung. Es sei ABC (Fig. 95, S. 224) das Dreieck, a, b, c seine Seiten, D der Mittelpunkt von BC, Winkel $CAD = \alpha$; P, Q mögen die beliebig angenommenen Punkte und EF ihre Verbindungslinie sein. Wir setzen

$\angle CEF = \theta$, $CE = x$, $EP = y$, $PQ = z$, $EF = y'$,

betrachten zunächst P als fest und beschränken Q auf das Element $z\,d\theta\,dz$ zwischen den Geraden EPF und $E'PF'$, deren gegenseitige Neigung $d\theta$ ist. Heisst der Inhalt des grösseren Teiles von ABC w, so ist

Fig. 95.



$$1) \qquad d\theta \int_0^y w z\,dz$$

die Summe der w für alle Lagen von Q in EPE'. Einer Änderung von x um dx und y um dy entspricht ein Element der Dreiecksfläche bei P von der Grösse $\sin\theta\,dx\,dy$; folglich erhält man für die Summe der w für alle Lagen von P in dem Element $EE''F''F$ den Ausdruck

$$2) \qquad \sin\theta\,d\theta\,dx \int_0^{y'} \int_0^y w\,dy\,z\,dz,$$

welcher Ausdruck zu verdoppeln ist, da P und Q vertauscht werden können.

Wenn nun

$$\Delta ABC = 1, \quad \Delta CEF = v$$

gesetzt wird, so ist 1) $w = 1 - v$, wenn θ zwischen den Grenzen 0 und α und x zwischen 0 und b bleibt. Liegt dagegen θ zwischen den Grenzen α und A, so ist 2) $w = 1 - v$, solange x zwischen 0 und jenem Werte x' liegt, für welchen $v = \frac{1}{2}$ wird, dagegen 3) $w = v$, wenn x zwischen x' und b sich bewegt. Der vollständige Ausdruck für die Summe der w auf dem bezeichneten Wertgebiete von x und θ ist also

$$3) \left\{ \begin{aligned} & 2\int_0^\alpha \int_0^b \int_0^{y'} \int_0^y (1-v)\sin\theta\,d\theta\,dx\,dy\,z\,dz \\ & + 2\int_\alpha^A \sin\theta\,d\theta \int_0^{y'} \int_0^y dy\,z\,dz \left\{ \int_0^{x'} (1-v)\,dx + \int_{x'}^b v\,dx \right\} \\ & = \frac{1}{3}\int_0^\alpha \int_0^b (1-v)\sin\theta\,d\theta\,y'^3\,dx + \frac{1}{3}\int_\alpha^A \left\{ \int_0^{x'} (1-v)y'^3\,dx + \int_{x'}^b v y'^3\,dx \right\} \sin(\end{aligned} \right.$$

Nun ist

$$v = \frac{x^2 \sin C \sin\theta}{2\sin(C+\theta)},$$

$$\Delta CAG = u = \frac{b^2 \sin C \sin\theta}{2\sin(C+\theta)},\quad AG \parallel EF,$$

$$\partial v = \frac{x \sin C \sin\theta\, dx}{\sin(C+\theta)},$$

$$du = \frac{b^2 \sin^2 C\, d\theta}{2\sin^2(C+\theta)},$$

$$y' = \frac{x \sin C}{\sin(C+\theta)};$$

daraus ergiebt sich

$$4)\qquad \sin\theta\, d\theta\, y'^3\, dx = 2\,\frac{v}{u}\, du\, dv.$$

Durch Einsetzung des Wertes aus 4) in den Ausdruck 3) werden die Variablen θ, x, auf welche die Integration noch auszudehnen ist, durch neue, u, v, ersetzt. Und da den Werten $0, \alpha, A$ von θ die Werte $0, \frac{1}{2}, 1$ von u, ferner den Werten $0, x', b$ von x die Werte $0, \frac{1}{2}, u$ von v entsprechen, so verwandelt sich der Ausdruck 3) in den folgenden:

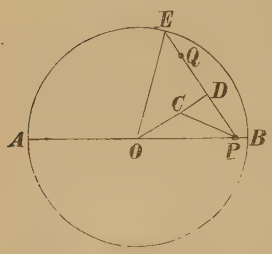
$$5)\quad \begin{cases} \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{u}(1-v)u^{-1}\,du\,v\,dv + \frac{2}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}(1-v)v\,dv + \int_{\frac{1}{2}}^{u}v^2\,dv\right\}u^{-1}\,du \\ = \dfrac{1}{9}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(3-2u)u\,du + \frac{1}{36}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(u^{-1}+8u^2)\,du = \frac{7}{72} + \frac{1}{36}\,l\cdot 2. \end{cases}$$

Solcher von den Winkeln und Seiten des Dreiecks unabhängiger Ausdrücke ergeben sich noch fünf, weil, um alle Fälle zu erschöpfen, jede Seite mit den beiden an ihr liegenden Winkeln in der eben vorgeführten Weise zu kombinieren ist. Mithin ist der verlangte Mittelwert, wenn — wie vorausgesetzt worden — die Fläche des Dreiecks ABC als Einheit angenommen wird, so dass auch die Anzahl der Punktepaare P, Q durch 1 ausgedrückt wird:

$$6)\qquad M = \frac{7}{12} + \frac{1}{6}\,l\cdot 2.$$

190. **Problem XXXVI.** *In der Fläche eines gegebenen Kreises werden zwei Punkte willkürlich angenommen und durch dieselben Kreise gelegt, welche den Umfang des gegebenen berühren; es ist die mittlere Fläche all dieser Kreise zu berechnen.*

Fig. 96.



Lösung. In Fig. 96 ist O der Mittelpunkt des gegebenen Kreises vom Halbmesser a, P, Q ein Paar beliebig angenommener Punkte. Um sie festzulegen, verbinde man P mit O und Q und setze

$$OP = ax, \quad PQ = ay, \quad \angle OPQ = \varphi.$$

Ist C der Mittelpunkt eines Kreises, der durch P und Q geht und den gegebenen Kreis berührt, r sein Halbmesser, so ist

$$\overline{OC}^2 = (a-r)^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PC}^2 - 2\,OP\,.\,PC\cos OPC$$
$$= a^2x^2 + r^2 - 2arx\cos(\varphi - CPD);$$

löst man $\cos(\varphi - CPD)$ auf und beachtet, dass $r\cos CPD = \frac{1}{2}ay$, folglich $\sin CPD = \frac{1}{r}\left(r^2 - \frac{1}{4}a^2y^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ist, so ergiebt sich zur Bestimmung von r die Gleichung

$$(a-r)^2 = a^2x^2 + r^2 - a^2xy\cos\varphi - 2ax\sin\varphi\left(r^2 - \frac{1}{4}a^2y^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

welche geordnet und mit Benutzung der Abkürzungen

1) $\qquad X^2 = 1 - x^2\sin^2\varphi, \qquad m^2 = 1 - x^2$

lautet:

2) $\quad 4X^2r^2 - 4a(m^2 + xy\cos\varphi)r + a^2(m^4 + 2m^2xy\cos\varphi + x^2y^2) = 0.$

Die Wurzeln r_1, r_2 dieser Gleichung sind die Halbmesser der beiden Kreise, welche durch P, Q gehen und den gegebenen Kreis berühren; die Summe der Flächeninhalte dieser zwei Kreise ist

3) $$\left\{\begin{aligned}\pi(r_1^2 + r_2^2) &= \pi[(r_1 + r_2)^2 - 2r_1r_2] \\ &= \pi\left[\frac{a^2(m^2 + xy\cos\varphi)^2}{X^4} - \frac{a^2(m^4 + 2m^2xy\cos\varphi + x^2y^2)}{2X^2}\right] = \pi\end{aligned}\right.$$

Wird zunächst der Punkt P festgehalten, so ist das Element der Kreisfläche bei Q ausgedrückt durch $ay\,d\varphi\,d(ay)$

$= a^2 y\,dy\,d\varphi$; erteilt man sodann dem Punkte P alle Lagen innerhalb des zugehörigen Flächenelementes, bestehend in einem Kreisringe mit den Radien ax und $ax + d(ax)$ und daher gleich $2\pi a^2 x\,dx$, so erhält man als Mittelwert der Flächen der beschriebenen Kreise, da ihre Anzahl $2\pi^2 a^4$ ist:

$$4)\quad M = \frac{1}{2\pi^2 a^4}\int\int\int \pi(r_1^2 + r_2^2)\,a^2 y\,dy\,d\varphi\,.\,2\pi a^2 x\,dx = \int\int\int V x\,dx\,y\,dy\,d\varphi.$$

Es handelt sich nun um die Ermittelung der Integrationsgrenzen.

1. Die Grenzen von y sind 0 und $\frac{PE}{a}$; für letztere Grenze ergiebt sich aus der Gleichung (s. $\triangle OPE$)

$$a^2 = a^2 x^2 + PE^2 - 2ax\,.\,PE\,.\cos\varphi$$

der Wert

$$\frac{PE}{a} = x\cos\varphi + \sqrt{x^2\cos^2\varphi + 1 - x^2} = x\cos\varphi + \sqrt{1 - x^2\sin^2\varphi} = X + x\cos\varphi.$$

Addiert man zu dem Ergebnis dieser Integration das Resultat der Substitution von $\pi - \varphi$ für φ, so braucht man

2. die Integration in Bezug auf φ nur auf das Intervall von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ auszudehnen, um alle Fälle zu erschöpfen, wo Q über AB liegt. Die Einbeziehung der Fälle, wo Q unter AB liegt, geschieht einfach durch Verdoppelung.

3. Die Grenzen von OP endlich sind 0 und a, daher die Grenzen von x ... 0 und 1.

Demnach ist

$$5)\quad M = 2\int_0^1 x\,dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left\{ \int_0^{X + x\cos\varphi} V y\,dy + S(\pi - \varphi) \right\}.$$

Zunächst hat man

$$\int_0^{X + x\cos\varphi} V y\,dy = \frac{a^2}{X^4}\left\{\frac{m^4}{2}(X + x\cos\varphi)^2 + \frac{2m^2 x\cos\varphi}{3}(X + x\cos\varphi)^3 + \frac{x^2\cos^2\varphi}{4}(X + x\cos\varphi)^4\right\}$$

$$- \frac{a^2}{2X^2}\left\{\frac{m^4}{2}(X + x\cos\varphi)^2 + \frac{2m^2 x\cos\varphi}{3}(X + x\cos\varphi)^3 + \frac{x^2}{4}(X + x\cos\varphi)^4\right\};$$

daraus ergiebt sich, wenn man gleichzeitig für $x^2\cos^2\varphi$ den aus Gleichung 1) resultierenden Wert $X^2 - m^2$ substituiert:

$$\int_0^{X+x\cos\varphi} V y\,dy + S(\pi-\varphi)$$

$$= \frac{a^2}{X^4}\left\{m^4(2X^2-m^2)+\frac{4m^2}{3}(4X^2-m^2)(X^2-m^2)+\frac{1}{2}(8X^4-8X^2m^2+m^4)(X^2-m\right.$$

$$-\frac{a^2}{2X^2}\left\{m^4(2X^2-m^2)+\frac{4m^2}{3}(4X^2-m^2)(X^2-m^2)+\frac{1}{2}(8X^4-8X^2m^2+m^4)(X^2-m\right.$$

$$= a^2\left[\frac{2}{3}(3-m^2)X^2-\frac{1}{3}(2-m^2)m^2-\frac{(5-m^2)m^4}{12X^2}-\frac{m^6}{6X^4}\right].$$

Durch Einführung dieses Ausdruckes in die Gleichung 5) wird weiter

$$6)\quad M=2a^2\int_0^1 x\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2}{3}(3-m^2)X^2-\frac{1}{3}(2-m^2)m^2-\frac{(5-m^2)m^4}{12X^2}-\frac{m^6}{6X^4}\right]d\varphi.$$

Darin ist

$$7)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} X^2\,d\varphi = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x^2 = \frac{\pi}{4}(1+m^2);$$

ferner wird mit $x\cos\varphi = u$:

$$8)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{X^2} = \int_0^x \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{x^2-u^2}} = \frac{\pi}{2m};$$

mit derselben Substitution ergiebt sich zunächst

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{X^4} = \int_0^x \frac{du}{(1-u^2)^2\sqrt{x^2-u^2}},$$

und wenn man weiter $\frac{u}{\sqrt{x^2-u^2}} = v$ setzt, so erhält man:

$$9)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{X^4} = \int_0^\infty \frac{(1+v^2)\,dv}{(1+m^2v^2)^2} = \int_0^\infty \frac{dv}{(1+m^2v^2)^2}+\int_0^\infty \frac{v^2\,dv}{(1+m^2v^2)^2} = \frac{\pi}{4m}+\frac{\pi}{4m^3}.$$

Nach Einsetzung der Werte aus 7), 8), 9) in die Gleichung 6) erhält man endlich:

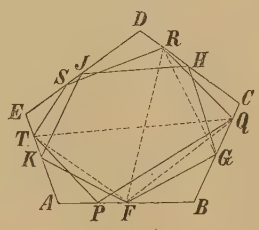
10) $M = \pi a^2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2} m^3\right) x\,dx = \frac{1}{2} \pi a^2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{z^3}\right) dz = \frac{2}{5} \pi a^2,$

d. i. zwei Fünftel der Fläche des gegebenen Kreises.

191. **Problem XXXVII.** *Einem gegebenen Polygon wird ein zweites von gleicher Seitenzahl in der Weise eingeschrieben, dass die Ecken des letzteren in den Seiten des ersteren einzeln willkürlich angenommen werden; es ist die mittlere Fläche des eingeschriebenen Polygons zu berechnen.*

Lösung. $ABCDE$ (Fig. 97) sei das gegebene, $PQRST$ das eingezeichnete Polygon. Betrachtet man nur den Punkt P als beliebig, die vier anderen als fest, so ist von dem Polygon $PQRST$ nur das Dreieck TQP veränderlich, und da dieses seine mittlere Fläche erlangt, wenn P in den Mittelpunkt (Schwerpunkt, s. Nr. 149 Theor. I) F von AB fällt, so repräsentiert $FQRST$ die mittlere Fläche von $PQRST$, solange nur P beliebig ist.

Fig. 97.



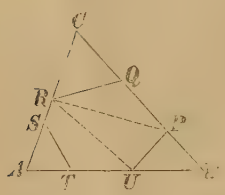
Betrachtet man an $FQRST$ nur Q als willkürlich, so ist nur das Dreieck FRQ veränderlich und erlangt seine mittlere Fläche, wenn Q in den Mittelpunkt G von BC fällt; folglich ist $FGRST$ die mittlere Fläche von $PQRST$, wenn bloss P und Q beliebig sind u. s. w.

Durch Fortsetzung dieses Raisonnements gelangt man zu dem Resultate, dass der mittlere Inhalt des Polygons $PQRST$, wenn alle Ecken desselben willkürlich in den betreffenden Seiten angenommen werden, gleich ist dem Inhalte des Polygons $FGHJK$, dessen Ecken in den Mittelpunkten von $AB, BC, \ldots$ liegen.

Für das Dreieck ist hiernach $M = \frac{1}{4} J$, für jedes Viereck $M = \frac{1}{2} J$, für ein regelmässiges n-Eck $M = \cos^2 \frac{\pi}{n} J$, wenn J in allen angeführten Fällen den Inhalt des gegebenen Polygons bedeutet.

192. **Problem XXXVIII.** *Die mittlere Fläche eines Sechseckes zu finden, dessen Ecken in den Seiten eines gegebenen Dreiecks, je zwei auf jeder Seite, willkürlich angenommen werden.*

Fig. 98.



Lösung. Werden nur die Punkte P, Q (Fig. 98) als beliebig angesehen, die vier andern festgehalten, so ist nur das Viereck $RUPQ$ veränderlich und seine Fläche erlangt ihren Mittelwert, wenn die Punkte P, Q die Seite BC in drei gleiche Teile teilen; denn für jede Lage von Q nimmt das Dreieck RUP seine mittlere Fläche an, wenn P in die Mitte von BQ fällt, und für jede Lage von P erlangt das Dreieck RPQ seine mittlere Fläche, wenn Q in den Mittelpunkt von PC fällt; folglich tritt der Mittelwert beider Dreiecke zugleich oder des durch sie gebildeten Vierecks ein, wenn P, Q die Seite BC in drei gleiche Teile teilen.

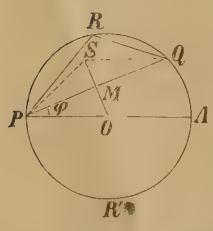
Durch Fortsetzung dieser Betrachtung wird man zu dem Resultate geführt, dass die mittlere Fläche von $PQRSTU$ durch jenes Sechseck vorgestellt wird, dessen Ecken die Seiten des gegebenen Dreiecks in je drei gleiche Teile teilen; folglich ist

$$M = \frac{2}{3} \Delta ABC.$$

193. **Problem XXXIX.** *Im Umfange eines gegebenen Kreises werden drei Punkte willkürlich angenommen; es ist der mittlere Flächeninhalt des Dreiecks zu finden, welches diese Punkte verbindet.*

Lösung. Einer von den drei Punkten P, Q, R, z. B. P (Fig. 99) kann fest bleiben; den zweiten Punkt, Q, betrachten wir vorläufig auch als unveränderlich und setzen $OA = r$, Winkel $APQ = \varphi$. Der mittlere Inhalt aller Dreiecke PQR, deren dritte Ecke R auf dem Bogen PRQ angenommen wird, ist dann gleich dem Inhalte des Dreiecks PQS, dessen Scheitel S mit dem Schwerpunkte des Bogens PRQ zusammenfällt, und die Summe dieser Dreiecke ist

Fig. 99.



$$\Sigma_1 = \Delta PQS \,.\, arc\, PRQ = PM \,.\, MS \,.\, arc\, PRQ,$$

oder, da

$$OS = \frac{r \,.\, PQ}{arc\, PRQ}$$

und

$$MS = OS - r \sin\varphi,$$

1) $$\Sigma_1 = r^3 \cos\varphi\,(2\cos\varphi - (\pi - 2\varphi)\sin\varphi).$$

Die Summe der Dreiecke PQR, deren dritte Ecke R auf den Bogen $PR'Q$ fällt, ergiebt sich hieraus, indem man φ durch $-\varphi$ ersetzt, und lautet demnach

2) $$\Sigma_2 = r^3 \cos\varphi\,(2\cos\varphi + (\pi + 2\varphi)\sin\varphi),$$

so dass die Summe aller Dreiecke PQR bei festbleibendem Q gleichkommt

3) $$\Sigma = 4r^3 \cos\varphi\,(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi).$$

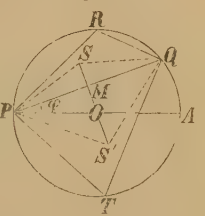
Daraus erhält man den verlangten Mittelwert

4) $$M = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Sigma\, r\, d(2\varphi)}{4\pi^2 r^2} = \frac{2r^2}{\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{3}{2\pi} r^2.$$

194. **Problem XL.** *Im Umfange eines gegebenen Kreises werden vier Punkte willkürlich angenommen und zu einem konvexen Viereck verbunden; den mittleren Flächeninhalt dieses Vierecks zu finden.*

Lösung. Durch analoge Betrachtungen wie bei Lösung der vorangehenden Aufgabe findet man für die Summe der Vierecke $PRQT$ bei feststehendem Q (Fig. 100) den Ausdruck

Fig. 100.



$$\Sigma = PSQS' \,.\, arc\, PRQ \,.\, arc\, PTQ,$$

wobei S, S' die Schwerpunkte der Bögen PRQ, PTQ sind.

Durch weitere Ausrechnung ergiebt sich

$$\Sigma = PM \,.\, SS' \,.\, arc\, PRQ \,.\, arc\, PTQ$$

$$= r\cos\varphi \left(\frac{r \,.\, PQ}{arc\, PRQ} + \frac{r \,.\, PQ}{arc\, PTQ} \right) arc\, PRQ \,.\, arc\, PTQ = 4\pi r^4 \cos^2\varphi,$$

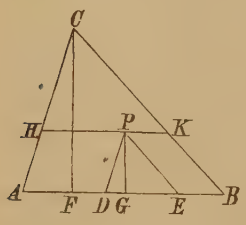
und daraus der verlangte Mittelwert mit Rücksicht auf den Umstand, dass die Punkte R, Q, T auf sechs Arten vertauscht werden können:

$$M = \frac{6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Sigma r\, d(2\varphi)}{8\pi^3 r^3} = \frac{6r^2}{\pi^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{3}{\pi} r^2,$$

also doppelt so gross als der Mittelwert des Dreieckes in Nr. 193.

195. **Problem XLI.** *Aus einem in der Fläche eines gegebenen Dreiecks willkürlich angenommenen Punkte werden Parallele zu zwei Seiten bis an die dritte Seite gezogen. Die mittlere Fläche des so gebildeten Dreiecks zu finden.*

Fig. 101.



Lösung. Ist ABC (Fig. 101) das gegebene Dreieck, P der willkürlich angenommene Punkt, $CF = h$, $PG = y$, so ist

$$\Delta DEP = \frac{y^2}{h^2}\Delta ABC;$$

da aber der Mittelwert von y^2 gleichkommt

$$\frac{\int_0^h y^2\, HK\, dy}{\frac{ch}{2}} = \frac{\int_0^h y^2 \frac{h-y}{h} c\, dy}{\frac{ch}{2}} = \frac{h^2}{6},$$

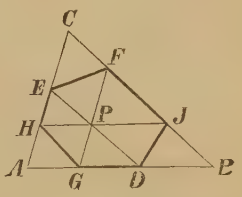
so ist der Mittelwert des Dreiecks DEP gleich

$$M = \frac{1}{6}\Delta ABC.$$

196. **Problem XLII.** *Durch einen in der Fläche eines gegebenen Dreiecks beliebig angenommenen Punkt werden Parallele zu den Seiten des Dreiecks gezogen und ihre Endpunkte zu einem Sechseck verbunden, dessen mittlere Fläche nun zu bestimmen ist.*

Lösung. Ein Blick auf Figur 102 lehrt, dass der doppelte Inhalt des Sechsecks $GDJFEH$ gleich ist dem gegebenen Dreieck ABC, vermehrt um die Summe der Dreiecke GDP, JFP, EHP; da nun die mittlere Fläche jedes dieser Dreiecke $\frac{1}{6}$ des gegebenen Dreiecks ausmacht (s. Nr. 195), so ist

Fig. 102.



$$2M = \Delta ABC + 3 \cdot \frac{1}{6} \Delta ABC,$$

woraus

$$M = \frac{3}{4} \Delta ABC$$

folgt.

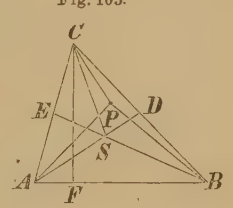
197. **Theorem IX.** *Der mittlere Inhalt eines Dreiecks, das einen beliebigen Punkt einer beliebig begrenzten ebenen Figur mit zwei festen Punkten einer Geraden verbindet, welche in der Ebene der Figur liegt ohne deren Umfang zu schneiden, ist gleich dem Inhalte jenes Dreiecks, welches den Schwerpunkt der Figur mit den festen Punkten verbindet.*

Beweis. Dieser Satz ist eine Folgerung des Theorems Nr. 168.

198. **Problem XLIII.** *In der Fläche eines Dreiecks wird ein Punkt willkürlich angenommen und mit den drei Eckpunkten verbunden; es ist der mittlere Inhalt des grössten, beziehungsweise mittleren und kleinsten der drei Teile zu finden, in welche das gegebene Dreieck zerlegt wird.*

1. **Lösung.** Ist ABC (Fig. 103) das gegebene Dreieck, S sein Schwerpunkt, P der willkürlich angenommene Punkt, so wird das über AB stehende Dreieck ABP das grösste sein, wenn P in das Viereck $ESDC$ fällt; seinen mittleren Inhalt erlangt es daher, wenn (s. Nr. 197) P mit dem Schwerpunkte des Vierecks $ESDC$ oder eines der Dreiecke ESC, DSC zusammenfällt, weil alle drei genannten Schwerpunkte auf einer Parallelen zu AB liegen. Mithin ist

Fig. 103.



$$M_g = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{1}{3} \left(CF + \frac{1}{2} CF + \frac{1}{3} CF \right) = \frac{11}{18} \Delta ABC.$$

Durch ähnliche Betrachtungen erkennt man, dass der Mittelwert des über AB ruhenden Dreiecks von mittlerer resp. kleinster Grösse dann eintreten wird, wenn der Punkt P mit dem Schwerpunkte eines der Dreiecke ASE, BSD resp. mit dem Schwerpunkte des Dreiecks ABS zusammenfällt. Demnach ist

$$M_m = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} CF + \frac{1}{3} CF\right) = \frac{5}{18} \Delta ABC,$$

$$M_k = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} CF\right) = \frac{2}{18} \Delta ABC.$$

2. **Lösung.** Bezeichnet man die Abstände des Punktes P von den Seiten $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ der Reihe nach mit x, y, z, die diesen Seiten entsprechenden Höhen des Dreiecks mit h_1, h_2, h_3, den Inhalt von ABC mit Δ, so gelten die Beziehungen

$$ax + by + cz = 2\Delta,$$
$$ah_1 = bh_2 = ch_3 = 2\Delta,$$

aus welchen die neue Relation

$$\frac{x}{h_1} + \frac{y}{h_2} + \frac{z}{h_3} = 1$$

folgt. Bezeichnet man die drei Quotienten links mit ξ, η, ζ, so liegt die Aufgabe vor: den Mittelwert des grössten, mittleren und kleinsten Teiles der willkürlich in drei Teile zerlegten Einheit zu finden. Ist ξ der grösste, ζ der kleinste Teil, so ist Nr. 169 zufolge

$$M(\xi) = M\left(\frac{x}{h_1}\right) = \frac{11}{18}, \quad M(\eta) = M\left(\frac{y}{h_2}\right) = \frac{5}{18}, \quad M(\zeta) = M\left(\frac{z}{h_3}\right) = \frac{2}{18},$$

mithin wie oben:

$$M\left(\frac{a}{2} x\right) = \frac{11}{18} \frac{a}{2} h_1 = \frac{11}{18} \Delta, \qquad M\left(\frac{b}{2} y\right) = \frac{5}{18} \frac{b}{2} h_2 = \frac{5}{18} \Delta,$$

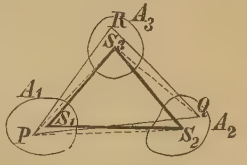
$$M\left(\frac{c}{2} z\right) = \frac{2}{18} \frac{c}{2} h_3 = \frac{2}{18} \Delta.$$

199. **Theorem X.** *Wird in jeder von drei beliebig begrenzten, in derselben Ebene liegenden Figuren, deren Umfänge durch eine Gerade nicht zugleich geschnitten werden können, ein Punkt willkürlich angenommen, so ist der mittlere Inhalt*

des durch diese drei Punkte bestimmten Dreiecks gleich dem Inhalte jenes Dreiecks, welches die Schwerpunkte der Figuren verbindet.

Beweis. A_1, A_2, A_3 (Fig. 104) sind die drei Figuren, S_1, S_2, S_3 ihre Schwerpunkte, P, Q, R die drei beliebigen Punkte. Wird bloss R als veränderlich angesehen, während P und Q als fest gelten, so ist der Mittelwert der Dreiecke PQR das Dreieck PQS_3 (s. Nr. 197).

Fig. 104.



Der Mittelwert der Dreiecke PQS_3, wenn Q als allein veränderlich angesehen wird, ist das Dreieck PS_3S_2.

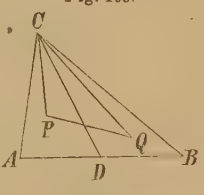
Der Mittelwert der Dreiecke PS_3S_2, wenn P alle Lagen in A_1 annimmt, d. i. der Mittelwert der Dreiecke PQR, wenn alle Punkte als willkürlich angesehen werden, ist also thatsächlich das Dreieck $S_1S_2S_3$.

Zusatz. Der obige Satz kann auch auf mehr Punkte und Figuren ausgedehnt werden, wenn letztere so angeordnet sind, dass die Umfänge irgend dreier durch eine Gerade nicht zugleich geschnitten werden können.

200. **Problem XLIV.** *In der Fläche eines gegebenen Dreiecks werden zwei Punkte willkürlich angenommen und mit einem Eckpunkte zu einem Dreieck verbunden; den mittleren Flächeninhalt dieses letzteren zu finden.*

Lösung. Es sei ABC (Fig. 105) das gegebene Dreieck, in welchem die Punkte P, Q beliebig angenommen worden sind; M bezeichne den Mittelwert der Fläche von PQC. Verbindet man den Mittelpunkt D von AB mit C und bezeichnet mit M' den Mittelwert von PQC, wenn P und Q zu verschiedenen Seiten von CD, mit M'' denselben Mittelwert, wenn P und Q auf einerlei Seite von CD sich befinden, so ist dem Satze Nr. 154 zufolge

Fig. 105.



$$2M = M' + M'';$$

nun ist offenbar $M'' = \frac{1}{2}M$, weil $\Delta ADC = \Delta DBC = \frac{1}{2}\Delta ABC$ ist, daher

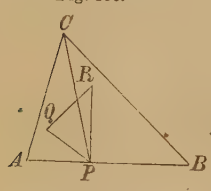
$$M = \frac{2}{3} M',$$

und da endlich (nach Nr. 199) M' gleich der Fläche jenes Dreiecks ist, welches die Schwerpunkte von ADC und DBC mit C verbindet, also $M' = \frac{2}{9} \Delta ABC$, so hat man

$$M = \frac{4}{27} \Delta ABC.$$

201. **Problem XLV.** *In der Fläche eines gegebenen Dreiecks werden zwei Punkte willkürlich angenommen und mit einem beliebigen Punkte einer der drei Seiten zu einem Dreieck verbunden; es ist der mittlere Flächeninhalt dieses Dreiecks zu bestimmen.*

Fig. 106.



Lösung. Die einer besonderen, durch $AP = x$ charakterisierten Lage des Punktes P in der Seite AB (Fig. 106) entsprechende mittlere Fläche des Dreiecks PQR sei M_x. Trennt man die Fälle, in welchen Q, R beide im Dreieck APC, beide im Dreieck PBC, endlich je einer in einem dieser Dreiecke liegt, und bezeichnet die betreffenden Mittelwerte mit M_1, M_2, M_3, so führt Satz Nr. 154 zu der Gleichung

1) $(\Delta ABC)^2 M_x = (\Delta APC)^2 M_1 + (\Delta PBC)^2 M_2 + 2 \Delta APC \cdot \Delta PBC \cdot M_3.$

Nun ist (s. Nr. 200)

$$M_1 = \frac{4}{27} \Delta APC, \qquad M_2 = \frac{4}{27} \Delta PBC,$$

ferner (nach Satz Nr. 199)

$$M_3 = \frac{1}{9} \Delta ABC;$$

führt man diese Werte in Gleichung 1) ein, so wird

$$(\Delta ABC)^2 M_x = \frac{4}{27} (\Delta APC)^3 + \frac{4}{27} (\Delta PBC)^3 + \frac{2}{9} \Delta APC \cdot \Delta PBC \cdot \Delta ABC,$$

oder wenn man die einzelnen Dreiecksflächen durch $AP = x$, $AB = c$ und die Höhe h des Dreiecks ABC, dessen Inhalt J heissen möge, ausdrückt:

2) $$J^2 M_x = \left(\frac{h}{2}\right)^3 \left\{ \frac{4}{27} x^3 + \frac{4}{27} (c - x)^3 + \frac{2}{9} cx (c - x) \right\}.$$

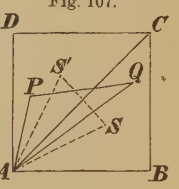
Der verlangte, auf alle Lagen von P in AB ausgedehnte Mittelwert ist

$$3)\quad M=\frac{\int_0^c J^2 M_x\,dx}{cJ^2}=\frac{1}{cJ^2}\left(\frac{h}{2}\right)^3\int_0^c\left\{\frac{4}{27}x^3+\frac{4}{27}(c-x)^3+\frac{2}{9}cx(c-x)\right\}dx=\frac{1}{9}J.$$

202. **Problem XLVI.** *In der Fläche eines gegebenen Quadrates werden zwei Punkte willkürlich angenommen und a) mit einer Ecke, b) mit dem Mittelpunkte des Quadrates zu einem Dreieck verbunden; es ist die mittlere Fläche dieses Dreiecks zu bestimmen.*

Lösung. a) Wird das Quadrat durch die Diagonale AC (Fig. 107) in Dreiecke zerlegt und beziehen sich M', M'' auf die Fälle, wo P, Q zu verschiedenen Seiten, beziehungsweise auf einerlei Seite von AC liegen, so ist dem Satze Nr. 154 zufolge

Fig. 107.

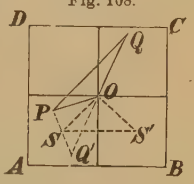


$$2M=M'+M'';$$

nun ist $M'=\Delta ASS'=\frac{1}{6}$ des Quadrates (S, S' sind die Schwerpunkte der Dreiecke ABC, ADC), $M''=\frac{4}{27}\Delta ABC=\frac{2}{27}$ des Quadrates (s. Nr. 200), daher $M=\frac{13}{108}$ des Quadrates.

b) Zerlegt man das Quadrat vom Mittelpunkte aus in vier gleiche Quadrate (Fig. 108), so lassen sich drei Gruppen von Fällen unterscheiden:

Fig. 108.



1. P, Q liegen in demselben Quadrate, Mittelwert M';

2. P, Q liegen in zwei nebeneinander liegenden Quadraten, Mittelwert M'';

3. P, Q liegen in zwei diagonal gegenüberstehenden Quadraten, Mittelwert M'''. Wird der Inhalt des gegebenen Quadrates $ABCD$ als Einheit angenommen, so besteht zwischen diesen drei und dem verlangten Mittelwerte M die Beziehung:

$$1^2 \cdot M = 4\left(\frac{1}{4}\right)^2 M' + 4 \cdot 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 M'' + 2 \cdot 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 M''',$$

oder

1) $$M = \frac{1}{4} M' + \frac{1}{2} M'' + \frac{1}{4} M'''.$$

M' und M''' sind an Grösse gleich, da jedem Dreieck OPQ dritter Art ein inhaltsgleiches OPQ' erster Art entspricht; obige Gleichung vereinfacht sich also zu

2) $$M = \frac{1}{2}(M' + M'').$$

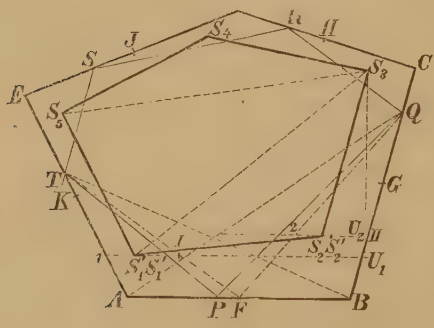
Nun ist dem Falle a) zufolge $M' = \frac{1}{4} \cdot \frac{13}{108}$, $M'' = \Delta OSS' = \frac{1}{16}$ daher

3) $$M = \frac{5}{108}$$

des gegebenen Quadrates.

203. **Problem XLVII.** *In jeder Seite eines gegebenen* n*-Ecks wird ein Punkt willkürlich angenommen; indem man diese Punkte der Reihe nach verbindet, entsteht ein zweites* n*-Eck, das von dem gegebenen* n *Dreiecke abschneidet. In jedem dieser Dreiecke wird abermals ein Punkt gewählt. Es ist der mittlere Flächeninhalt des* n*-Ecks zu finden, welches durch Verbindung der letztgenannten Punkte gebildet wird.*

Fig. 109.



Lösung. Es sei $ABCDE$ (Fig. 109) das gegebene, $PQRST$ das erste ihm eingeschriebene Polygon. Nimmt man in den Dreiecken ATP, BPQ, CQR, DRS, EST die Punkte U, V, W, X, Y der Reihe nach beliebig an, so stellt, dem Satze Nr. 199 zufolge, bei festbleibendem $PQRST$ das Polygon $S_1 S_2 S_3 S_4 S_5$, welches die Schwerpunkte der eben genannten Dreiecke verbindet, die mittlere Fläche von $UVWXY$ vor.

Nun mögen auch die Punkte P, Q, R, S, T als veränderlich gelten, und zwar zunächst nur der Punkt P in AB. Dann ändern sich die Punkte S_1, S_2 gleichzeitig; von dem Polygon $S_1 \dots S_5$ ist also das Viereck $S_5 S_1 S_2 S_3$ veränderlich und erlangt, wie jetzt gezeigt werden soll, seine mittlere Fläche, wenn P mit dem Mittelpunkt F von AB zusammenfällt.

Die Schwerpunkte S_1, S_2 bewegen sich während der Änderung von P auf geraden, zu AB parallelen Geraden; die Wege, welche sie beschreiben, sind leicht zu ermitteln. Fällt nämlich P nach A oder unendlich nahe daran, so liegt der Schwerpunkt des Dreiecks APT in 1 (so dass $A1 = \frac{1}{3} AT$), jener des Dreiecks BPQ in 2 (Schwerpunkt von ABQ). Kommt dagegen P nach B zu liegen, so befindet sich der Schwerpunkt des Dreiecks APT in I (Schwerpunkt von ABT), jener des Dreiecks BPQ in II (so dass $BII = \frac{1}{3} BQ$). Die Schwerpunkte S_1, S_2 bewegen sich also längs der Strecken $1I$, $2II$ beziehungsweise, und ihre Lagen sind über diese Strecken gleichförmig verteilt wie jene von P über AB.

Daraus folgt unmittelbar, dass die mittlere Fläche des Dreiecks $S_5 S_1 S_3$ dargestellt ist durch das Dreieck $S_5 S'_1 S_3$, in welchem S'_1 der Mittelpunkt von $1I$ ist; für diese Lage von S_1 fällt aber P nach F.

Aber auch das Dreieck $S_1 S_2 S_3$ erlangt seinen Mittelwert, wenn S_1, S_2 mit den Mittelpunkten S'_1, S'_2 von $1I$, $2II$ zusammenfallen. Denn

$$\Delta S_1 S_2 S_3 = \Delta S_3 U_1 S_1 - \Delta S_3 U_2 S_2 - U_1 S_1 S_2 U_2,$$

und alle Bestandteile der rechten Seite nehmen gleichzeitig ihren bezüglichen Mittelwert an, wenn S_1, S_2 nach S'_1, S'_2 fallen.

Auf demselben Wege kann gezeigt werden, dass das Polygon $S_1 \dots S_5$ für alle Lagen der Punkte P, Q, R, S, T auf den betreffenden Seiten des gegebenen Polygons seine mittlere Fläche erlangt, wenn diese Punkte mit den Mittelpunkten F, G, H, J, K der Seiten zusammenfallen.

Im Hinblick auf Nr. 191 ergiebt sich hieraus die bemerkenswerte Thatsache, dass die Flächen der Polygone $PQRST$ und $UVWXY$ gleichzeitig ihre Mittelwerte erlangen.

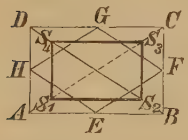
Erstes Beispiel. Ist die gegebene Figur ein Dreieck (Fig. 110) vom Inhalte J, so ist $M = \frac{1}{4} J$.

Fig. 110.

Zweites Beispiel. Ist die gegebene Figur ein Rechteck (Fig. 111), dessen Inhalt J ist, so hat man

$$M = \frac{4}{9} J.$$

Fig. 111.



Drittes Beispiel. Ist die gegebene Figur ein reguläres n-Eck (Fig. 112), dessen Seite a und dessen Inhalt J ist, so ergiebt sich

$$M = \left(\frac{S_1 S_2}{a}\right)^2 J;$$

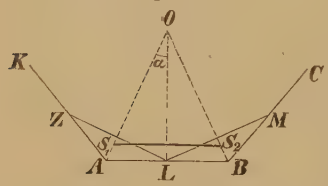
da nun $S_1 S_2 = a - \frac{2}{3} a \sin^2 \alpha$, so ist weiter

$$\left(\frac{S_1 S_2}{a}\right)^2 = \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \alpha\right)^2 = 1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha + \frac{4}{9} \sin^4 \alpha = \frac{1}{9} (8 \sin^2 \alpha + \cos^2 2\alpha),$$

daher endlich

$$M = \frac{1}{9} \left(8 \sin^2 \frac{\pi}{n} + \cos^2 \frac{2\pi}{n}\right) J.$$

Fig. 112.



204. **Problem XLVIII.** *In der Fläche eines gegebenen Dreiecks werden drei Punkte willkürlich angenommen und zu einem Dreieck verbunden; es ist der mittlere Flächeninhalt desselben zu bestimmen.*

Lösung. Das gegebene Dreieck heisse ABC, sein Inhalt J, das variable PQR, der verlangte Mittelwert M. Die Summe der Dreiecke PQR, d. i. MJ^3, wächst um $d(MJ^3)$, wenn man das Dreieck ABC um ein Element dJ vergrössert, das begrenzt ist von der Seite AB und einer dazu Parallelen in unendlich kleinem Abstande; und zwar besteht die Änderung der erwähnten Summe in der Summe jener Dreiecke PQR, welche einen Eckpunkt in dem Element dJ (oder in der Seite AB) haben, ist daher, wenn der Mittelwert dieser besonderen Dreiecke mit M' bezeichnet wird, gleich $3M'J^2dJ$. Zwischen M und M' besteht also die Gleichung

oder

$$d(MJ^3) = 3M'J^2dJ$$

$$d\left(\frac{M}{J}J^4\right) = 3M'J^2\,dJ,$$

und da $\frac{M}{J}$ konstant ist, so ergiebt sich nach Ausführung der links vorgeschriebenen Differentiation

$$M = \frac{3}{4}M'.$$

Setzt man für M' den in Nr. 201, Gleichung 3) gefundenen Wert ein, so erhält man schliesslich

$$M = \frac{1}{12}J.$$

Anmerkung. Die Aufgabe: Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass vier in der Fläche eines gegebenen Dreiecks willkürlich bezeichnete Punkte P, Q, R, S ein konvexes Viereck bestimmen — findet in der vorangehenden ihre einfachste Lösung.

Bezeichnet nämlich J den Inhalt des gegebenen, V den Inhalt jenes Dreiecks, das von irgend drei der vier Punkte, z. B. P, Q, R, bestimmt wird, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der vierte Punkt S in das Dreieck PQR fällt oder dass die vier Punkte ein Viereck mit einspringendem Winkel bestimmen, dem Satze Nr. 175 zufolge:

$$q = 4\frac{M(V)}{J},$$

d. i. mit Zuhilfenahme des oben für $M(V)$ gefundenen Wertes

$$q = \frac{1}{3};$$

daraus ergiebt sich die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{2}{3}.$$

205. **Problem XLIX.** *In der Fläche einer ebenen, konvexen, geschlossenen Kurve werden drei Punkte willkürlich angenommen und zu einem Dreieck verbunden; es soll der mittlere Flächeninhalt dieses Dreiecks berechnet werden.*

Lösung. Wird der Inhalt des Dreiecks PQR mit V bezeichnet, sein Mittelwert mit $M(V)$, und wird ein vierter Punkt S in der Fläche der Kurve beliebig angenommen, so

fällt er, dem Satze Nr. 175 zufolge, mit der Wahrscheinlichkeit

$$1) \qquad \Pi = \frac{M(V)}{J}$$

in das Dreieck PQR, wenn J den Inhalt der Kurve bezeichnet.

Für dieselbe Wahrscheinlichkeit wurde in Nr. 126, Gleichung 6), der Ausdruck

$$2) \qquad \Pi = 1 - \frac{1}{J^4}\int\int C^3\,\Sigma^2\,dp\,d\theta$$

gefunden; darin bedeutet C die Länge jener Sehne der Kurve, deren Lage durch die Polarkoordinaten p, θ bestimmt ist, Σ das zu einer Seite dieser Sehne befindliche Segment der Fläche; die Integration ist auf alle Sehnen auszudehnen und dabei Σ immer zur selben Seite der Sehne zu nehmen.

Durch Vergleichung von 1) und 2) ergiebt sich der verlangte Mittelwert

$$3) \qquad M(V) = J - \frac{1}{J^3}\int\int C^3\,\Sigma^2\,dp\,d\theta.$$

Für einen Kreis vom Halbmesser r beispielsweise hat das Doppelintegral [s. Nr. 125, Gleichung 4)] den Wert

$$\pi^2 r^8\left(\pi^2 - \frac{35}{48}\right);$$

der mittlere Flächeninhalt des aus drei in der Fläche dieses Kreises beliebig angenommenen Punkten gebildeten Dreiecks ist also gleich

$$M = \frac{35\,r^2}{48\,\pi}.$$

Fig 113.

206. **Problem L.** *Auf einen gegebenen festen Kreis wird ein zweiter willkürlich geworfen; es ist der mittlere Inhalt der durch ihn bedeckten Fläche des ersten Kreises zu finden.*

Lösung. Es sei O (Fig. 113) der Mittelpunkt, R der Halbmesser des festen, Q der Mittelpunkt, r der Halbmesser des geworfenen Kreises, V die beiden Kreisen gemeinsame Fläche; eine solche ergiebt sich nur dann, wenn Q innerhalb eines aus O als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $R + r$ beschriebenen Kreises zu liegen kommt, und nur diese Lagen von Q sollen in Betracht gezogen werden.

Wird in der Fläche des festen Kreises ein Punkt P beliebig angenommen, so ist dem Satze Nr. 175 zufolge

1) $$p = \frac{M(V)}{\pi R^2}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er in die beiden Kreisen gemeinsame Fläche fällt.

Dieses Ereignis kann aber auch so aufgefasst werden, dass Q, nachdem P bereits angenommen worden, in einer Entfernung von P zu liegen kommt, die kleiner ist als r, und bei dieser Auffassung drückt sich seine Wahrscheinlichkeit wie folgt aus:

2) $$p = \frac{\pi r^2}{\pi (R+r)^2} = \left(\frac{r}{R+r}\right)^2.$$

Aus der Vergleichung von 1) und 2) ergiebt sich der verlangte Mittelwert

3) $$M(V) = \pi R^2 \left(\frac{r}{R+r}\right)^2.$$

Sind die Kreise gleich gross, so wird im Mittel ein Viertel des festen durch den beweglichen gedeckt.*

207. **Problem LI.** *Eine Scheibe, deren Umfang durch eine konvexe Kurve gebildet wird, ist auf eine Ebene geworfen worden, in welcher durch zwei parallele Gerade ein Streifen begrenzt ist. Es soll der mittlere Inhalt des durch die Scheibe bedeckten Teils des Streifens gefunden werden, vorausgesetzt, dass nur jene Fälle gezählt werden, wo die Scheibe den Streifen wirklich trifft.*

Lösung. Der Inhalt der Scheibe sei J, die Länge ihres Umfanges (L) heisse s, die Breite des Parallelstreifens in der Ebene a, die durch die Scheibe gedeckte Fläche V. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein auf der Scheibe willkürlich bezeichneter Punkt P (Fig. 114, S. 244) auch auf den Streifen zu liegen kommt, ist

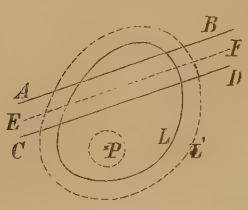
1) $$p = \frac{M(V)}{J}.$$

Dieses Ereignis kann aber auch so gedeutet werden, dass bei fester Scheibe der auf sie geworfene Parallelstreifen den Punkt P aufnimmt. Um den dieser Auffassung entsprechenden

* Vergl. damit Nr. 176.

Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit zu finden, bedenke man, dass ein günstiger Fall sich ergiebt, wenn die Mittellinie EF des Streifens einen Kreis schneidet, welcher mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}a$ aus P als Mittelpunkt beschrieben wird, während jene Fälle als möglich zu zählen sind, wo EF eine zu L parallele Kurve L', im Abstande $\frac{1}{2}a$ von L, schneidet.

Fig. 114.



Da die Länge der letzteren Kurve gleichkommt $s + \pi a$*, so ist, Nr. 81 zufolge:

$$2) \qquad p = \frac{\pi a}{s + \pi a}.$$

Durch Vergleichung der Ausdrücke 1) und 2) erhält man den verlangten Mittelwert

$$3) \qquad M(V) = \frac{\pi a}{s + \pi a} J.$$

Ist die Scheibe kreisförmig und r ihr Halbmesser, so ist

$$M(V) = \frac{a}{2r + a} \pi r^2,$$

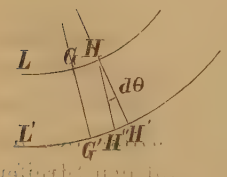
insbesondere für $a = 2r$:

$$M(V) = \frac{1}{2} \pi r^2.$$

---

* Ist $GH = ds$ (Fig. 115) ein Element der Kurve L, so begrenzen die Normalen $GG' = HH' = \frac{a}{2}$ seiner Endpunkte ein Element $G'H' = ds'$ der Parallelkurve L'. Führt man $HH'' \,//\, GG'$, so wird $G'H'$ in zwei Teile zerlegt, und mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung ist

Fig. 115.



$$G'H'' = GH = ds, \qquad H''H' = \frac{a}{2} d\Theta,$$

daher

$$ds' = ds + \frac{a}{2} d\Theta;$$

durch Integration folgt hieraus die Länge der Parallelkurve

$$s' = s + \frac{a}{2} 2\pi = s + \pi a.$$

NON-CIRCULATING BOOK

U.C. BERKELEY LIBRARIES
C037545866

UNIV. OF CALIFORNIA
WITHDRAWN

614315

QA 273
C9
Math.
Dept.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY